CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández

Ampliación de mi ANTROPOLOGÍA DE LA VIDA COTIDIANA

RECORDATORIO 76 (Divagaciones papiroflécticas)

PREÁMBULO

En este recordatorio se va a hablar mucho de CP (crease pattern, en inglés) y creo necesario hacer algunas precisiones desde el principio. El acrónimo inglés ya esta acuñado en español pero su traducción difiere según los autores.

Mi preferencia es ésta: CP = Modelo de dobleces.

Doblez es la *señal que queda en la parte por donde se ha doblado algo.* Es decir la huella de un plegado, que puede resultar en monte o en valle, según desde dónde se la mire. Un CP es eso, un conjunto de líneas (señales o huellas) y no un conjunto de pliegues. Un pliegue esta hecho de tres cosas: dos caras y su línea de intersección o doblez.

Otros llaman cicatriz al doblez, que es cosa poco apropiada: Una cicatriz, en el mejor de los casos, es una sutura y no un doblez. Ambas palabras (cicatriz y doblez) tienen en común una cosa muy interesante para los jugadores de *Intelect*: que ambas contienen una z, la letra de mayor valor en el juego.

UNO

En 1969 regresé a Madrid para quedarme. Poco después comencé mi andadura informática con el desarrollo de la programación de *Tubos acodados en el espacio* que acometí con IBM ya que en aquel tiempo no teníamos en fábrica unos ordenadores con las aplicaciones de cálculo necesarias (eran unos Ericsson): estábamos conectados en modo CALL con la sede de IBM en Castellana 4 (notable construcción del arquitecto Miguel Fisac) que nos prestó la valiosa ayuda de J. M. Belmonte Badía, profesor de Cálculo numérico en la E.T.S de Ingenieros de Caminos de Madrid, y que además trabajaba para aquella firma. Ya en 1974 mi obra había empezado a tomar cuerpo y culminaría en 1982 con el Premio de Innovación Tecnológica Industrial del Ministerio de Industria y Energía.

Coincidiendo con todo esto, mi amigo Juan Manuel que viajó a Japón me enseñó el libro de papiroflexia que había comprado allí titulado *ORIGAMI FOR THE ENTHUSIAST,* del autor John Montroll. Me encantó y no paré hasta conseguirlo. Era el año 1979.

Mi compañero Luis Alberto Petit había fundado en 1957 el SIMO que yo visitaba cada año con el mayor interés. Esto sería hacia 1980, cuando el salón aún se instalaba en la Casa de Campo. En una de esas visitas anuales se me ocurrió preguntar en el estand de IBM si había posibilidad de disponer de algún programa de ordenador (hoy hablaríamos de *alguna aplicación*) que permitiera manejar las complicaciones de la papiroflexia para obtener figuras con más facilidad. Me respondieron que los investigadores de la Compañía estaban trabajando en ello. Me quedé sorprendido y contento: No esperaba una respuesta tan positiva. Debo aclarar que el acrónimo SIMO ha ido cambiando de

significado hasta nuestros días: Empezó por tener el sentido inicial de Salón Informativo de Material de Oficina, para evolucionar como Salón de la Informática y del Material de Oficina, etc.

DOS

Ahora, en febrero de 2016, recibo la conferencia de divulgación sobre origami que acaba de dictar Robert Lang, el famoso físico californiano que mutó al origami desde su especialidad de físico del láser, y que dentro ya del origami ha trabajado incesantemente (que yo sepa, desde antes de 1994 hasta hoy) en su TreeMaker, una aplicación que permite, precisamente, aquello que yo echaba de menos en la IBM del SIMO a que acabo de referirme.

Conocí a Robert Lang en Madrid el año 2000 con ocasión de la Convención Internacional de Papiroflexia que se celebró en nuestra capital. En ella se presentó el libro que yo acababa de publicar para la AEP (Asociación Española de Papiroflexia) con el título de **Matemáticas y Papiroflexia**. Tuve ocasión de mostrárselo a R. Lang. Lo miró con interés y me comentó, según lo ojeaba, que le parecía de buen aspecto pero que como él no sabía español, mejor haría traduciéndolo al inglés para que, además, pudiera tener una mayor difusión en la Red. Como ya he contado en algún otro sitio, fue lo que hice: lo traduje y lo puse en mi sitio web junto con la versión española.

Vean a continuación lo que nos dice el propio R. Lang. Debo aclarar que lo que a lo largo de este mi escrito destaco como de él, lo es, aunque no todo corresponda a la conferencia de divulgación a que me he referido en **DOS**.

> En 1989 escribí un artículo para la revista *Engineering & Science* sobre el estado de la papiroflexia técnica que ya entonces presentaba avances gracias a la incorporación de principios científicos y matemáticos. Refiriéndome a algunas de las conexiones entre origami, matemáticas y tecnología, escribí:
>
> > La computación se rindió al atractivo de la papiroflexia cuando, en 1971, Arthur Appel (*) programó un ordenador modelo 360 de IBM para poder imprimir configuraciones geométricas sencillas a un ritmo de más de cien por minuto. El 90 % de ellas resultaron inútiles, pero ello sugería una pregunta interesante: Algún día podría un ordenador diseñar un modelo que pudiera juzgarse superior al que diseña el hombre? Dado que en gran medida el proceso de diseño es geométrico, las perspectivas no son tan sombrías como pudiera parecer.

(*) Famoso investigador de IBM citado por el académico Fernando Bombal Gordón en la conferencia que dictó en la Real Academia de Ciencias de Madrid bajo el título *Matémáticas, Lógica y Ordenadores* el 31-3-2016.

De lo anterior quiero destacar tres cosas:

1.-No era yo el único que se planteaba una cosa tan curiosa: descubrir la coincidencia de las matemáticas en el ámbito de un arte tan mágico como el de la papiroflexia. He conocido más de un papiroflecta que se ejercita en la magia.

2.-No me engañaron los de IBM en el SIMO: diez años antes de mi pregunta ya se habían rendido al embrujo de la papiroflexia.

3.-Esta cosa la dejo para verla a continuación.

TRES

Debo declarar que a veces soy de los que *saltan a conclusiones,* que es cosa que llevan muy a mal los ingleses. Sin embargo y, sin pretender ser sabio, que sería una tontería por mi parte, pienso que los sabios necesitarán muchas veces saltar a las conclusiones que su intuición les apunta, en ocasiones, con sólo un poco de apoyo: es el riesgo que la vida se permite en su avance continuo.

A mí me suele pasar esto con el lenguaje, con las palabras. Recordaré ahora algunos casos y, siempre el de mi simpática y muy sevillana prima Pepita que, cuando de niña oía hablar de *las ruinas de Itálica*, pensaba que se trataba de *las ruedas metálicas.*

El trajín en que me metí con el *to* del infinitivo de los verbos ingleses al relacionarlo con el artículo neutro griego τό condujo al Diccionario Oxford y la Universidad de Ohio a entretenerse en deshacer mi atropello dándome, como propina a mi curiosidad una enseñanza muy interesante.

Otro. Ahora no sé por qué, pero había adjudicado yo la autoría de unos bellos flexágonos espaciales a un tal R. Neal y pretendía saber algo más de él. De la mano de Google doy con un tal Radford M. Neal, Profesor de Estadística Avanzada y de Ciencia de la Computación en la Universidad de Toronto. Me pongo en contacto con él y me responde muy gentil: "Lo siento, pero yo no soy el autor. La única otra persona que conozco como R. Neal es mi madre pero tampoco creo que ella sea responsable de eso. Le deseo suerte en su búsqueda".

Y la tuve. Me tropecé en Internet con R. Neale, del que se dice en Wikipedia: "Es un eminente papiroflecta americano, conocido por sus sencillos y elegantes modelos, que va más allá de los límites convencionales de la Papiroflexia." El detalle en que había fallado yo, era la última letra del apellido.

Otro más. Cuando ya tenía consolidado en la Red mi sitio web (construido con multitud de páginas) quise saber cual fuera su posición en ella, es decir, el rango de aprecio que mis páginas podrían merecer a los lectores. Descubrí que, efectivamente, existía un *Page Rank* (rango de *página*) que apuntaba, entre otras cosas, a las visitas que recibía cada página: Una designación perfecta para una función concreta, pero también un craso error por mi parte: Resulta que esa designación hay que entenderla como que se trata de un algoritmo diseñado por el Sr. Page (el Sr. Página, Larry Page, -uno de los fundadores de Google-) para la función de ordenación de las páginas web con arreglo a ciertos criterios. ¡También es coincidencia la del apellido y la función!

Algo parecido me ha pasado con el Sr. Appel de IBM que cuenta R. Lang. Al leerlo me dije: ¡Tate!, este señor tiene que ser un *spinoffista* de IBM que terminó fundando y dando nombre a la *Fábrica de la Manzana*. Otro error, no sé si craso o magro (*spinoff* es el nombre que se da a una *empresa-brote* que se desgaja de otra mayor o de un centro de investigación, comúnmente de la mano de algún empleado de prestigio).

El fundador de Apple no fue nadie procedente de IBM; la crearon dos de nombre Esteban. Steve Wozniak asegura que el origen del nombre es que Steve Jobs habría decidido llamar «manzana» a la empresa porque un granjero de Oregón le sugirió este nombre. Otra coincidencia: que uno de los Esteban se apellidara Jobs (según el Webster: *algo que requiere muy grande esfuerzo.* ¡Y vaya si lo desarrolló hasta su muerte!).

Ya me imagino al lector atento señalando mi gazapo manzanero. Ahora no se trata de una coincidencia, sino de una disincidencia: Don Arthur Appel tiene terminado su apellido en *el* que hace pensar en la palabra francesa *llamada* o *llamamiento* con acento fónico agudo. Por el contrario, la manzana de los Mac termina, en inglés, con las letras *le* de *Apple* y su acento grave. No se trata, pues, de un *lapsus calami*.

CUATRO

Ya es momento para profundizar un poco en la conferencia de R. Lang a la que me he referido en **DOS**. En ella enfatiza el descubrimiento de las matemáticas que se ocultan tras la papiroflexia: Éstas constituyen una herramienta poderosa y de gran utilidad para crear CPs.

Se refiere a lo que resulta de las bases de plegado complejas, a esas que se construyen con otras elementales mezcladas con arte para imitar a la naturaleza. No olvidemos que el arte de la papiroflexia, como el de la escultura o la pintura puede tender al realismo o a la superación de las formas naturales mediante la *caricatura*, pero tomando en serio al modelo.

En escultura / arquitectura a mi me gusta recordar la ampliación del Banco de España que ha hecho el arquitecto Moneo para la esquina Alcalá / Marqués de Cubas, o las últimas intervenciones en la Sagrada Familia barcelonesa. Consisten, en definitiva, en caricaturas tremendamente serias de la obra a la que prestan continuidad.

A su vez las bases elementales utilizan formas de plegado más elementales aún. Listaré algunas de estas formas y bases elementales, según J. Montroll:

FORMAS: Plisado; cometa; plegado inverso (al interior o al exterior); pliegue de arruga colapsada (al interior o al exterior); oreja de conejo (sencilla y doble); plegado preliminar; plegado en pétalo (variantes I y II); plegado con aplastamiento; plegado en crep.

BASES: Pez; pájaro (grulla, para los japoneses); rana; pájaro, estirada; bomba de agua; pájaro y rana, en crep.

El hablar de bases de plegado me da pretexto para hacer algunas aclaraciones al texto de mi libro **Matemáticas y Papiroflexia** (INCENTRO -Teorema de Fushimi-, pág. 61 y siguientes).

http://www.caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/Extraordinario%202000.pdf

Hay que decir, primero, que los nodos de un plegado (los puntos de intersección de los dobleces) pueden estar situados dentro de la superficie del cuadrado de partida (p.e la chepa de la grulla) o en las aristas de dicho cuadrado (lados o vértices). Esta última situación es la adecuada para toda clase de apéndices o extremos: en la misma grulla, el pico, la cola o las dos alas. En el caso de insectos o cuadrúpedos, el morro, la cola, las patas, cuernos y orejas, o antenas y mandíbulas.

Es notable la diferencia entre estas dos posiciones para los nodos. Un nodo en el interior del papel exige para él un número par de pliegues ya que cada pliegue supone dos caras de plegado (dos ángulos; flaps se las llama en inglés). Además han de cerrarse los 360º disponibles en el papel. Es decir, la línea de plegado inicial ha de coincidir con la final una vez aplastada la figura.

En cambio, si el nodo se sitúa en un lado o en un vértice, la cantidad de caras puede ser par o impar (las líneas inicial y final no tienen por qué coincidir). En todo caso siempre habrá que atenerse a la exigencia anotada en mi libro de no incurrir en interferencia del papel consigo mismo en los pliegues. Por ejemplo, un nodo de vértice podría, teóricamente, admitir todos sus dobleces en monte,

pero el grueso del papel lo impide o dificulta. Habrá que administrar una distribución razonable de líneas en monte y en valle en el caso de un apéndice muy agudo.

Otra cuestión que queda incompleta en el libro es lo de los 180º, equivalente a que en un nodo han de resultar suplementarios los ángulos alternos que se forman en el aplastamiento. Ello es cierto tomado al pie de la letra tal como se demuestra para un aplastamiento de cuatro caras (flaps, solapas), como en el caso del Incentro de un triángulo.

Pero si las caras aplastadas son más de cuatro (siempre en número par cuando el nodo es interior al cuadrado del papel), la cosa hay que explicarla mejor.

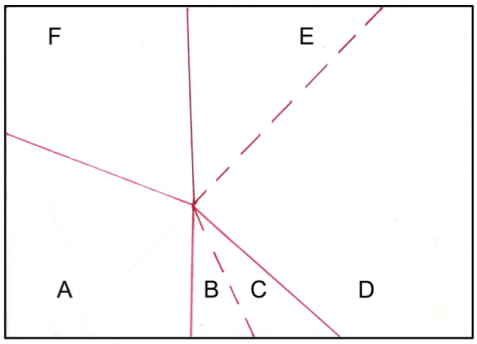

Fig. 1

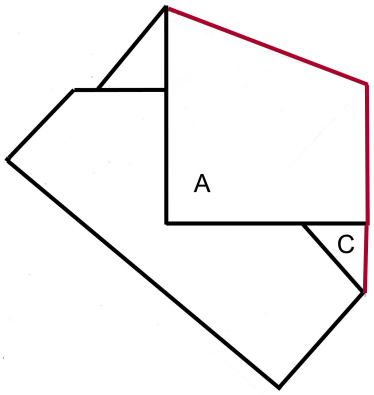

Fig. 2

La Fig. 1 es una ampliación del único nodo de seis caras existente en la figura superior de la pág. 62 del libro, dicho esto sólo a modo de aclaración. Llamando A, B, C, D, E, F a los ángulos de dichas caras que concurren en el nodo y plegando hasta el aplastamiento la mencionada Fig. 1, para obtener la Fig. 2, podremos escribir:

A + B + C + D + E + F = 360º (figura extendida)
A - B + C - D + E - F = 0º (figura aplastada)

Es decir,
A + C + E = B + D + F

Que, teniendo en cuenta lo que ocurre en la figura extendida nos lleva a que
A + C + E = B + D + F = 180º.

Observar que en la figura aplastada los sumandos positivos están tomados en sentido levógiro y los negativos en sentido destrógiro tal como pide la realidad del aplastamiento. También se puede comprobar que la anterior demostración es válida si el giro se origina desde cualquier otra cara (antes hemos empezado por la A). Y, por supuesto, la validez del razonamiento para cualquier número par de caras superior a seis. Asimismo se ve en la Fig. 1 que la diferencia de pliegues en monte y en valle es igual a dos.

NOTA
Lo visto antes es, como se dijo, para nodos situados en el interior del papel. Si lo están en un lado y la rotación de ángulos hace que el lado final coincida con el inicial, en las expresiones anteriores han de cambiarse los grados pasando 360 a 180 y 180 a 90.

CINCO (El *TREE MAKER* de Robert Lang)
Según su autor, es una aplicación para diseñar CPs. Lo sustantivo de su nombre hace referencia a lo dendrítico de la teoría de grafos. Yo vengo llamando figuras esqueléticas a las compuestas por aristas (un tetraedro esquelético, por ejemplo). Ahora preferiría llamar *Constructor de paloides* a la aplicación de R. Lang, por el parecido de su figura básica con un insecto palo. También nuestro autor habla de *skeleton of a crease pattern* y de *stick figures* (stick insects -insectos palo-, son algunas).

Así pues, la *stick figure* de R. Lang (mi paloide) sería, para construir un miriápodo, una línea horizontal central de la que parten a cada lado, muchas y pequeñas líneas transversales, las patas.

Las puntas extremas de éstas deben situarse en los lados opuestos del cuadrado de partida para optimizar el uso del papel, tal como apunté en **CUATRO**. Una vez conseguido esto, que no es fácil, hay que atacar la fase de *recogida de papel* hacia el interior, que asimismo es dificultosa dada la proporción de longitudes entre una pata y el cuerpo del miriápodo, ya que el animal ha de centrarse en el cuadrado de papel.

Pero las dificultades no terminan ahí: sólo acaban de empezar. Parece inevitable sucumbir a la tentación de declarar la cosa como tarea imposible. Sin embargo, el hecho de que R. Lang haya conseguido con su aplicación la CP que produce un hermoso escorpión según:
http://www.langorigami.com/crease-pattern/scorpion-varileg-opus-379) , obliga a la perseverancia. Copio lo que él mismo dice:

> Estos complicados Modelos de dobleces son extremadamente difíciles de conseguir y problemáticos para obtener de ellos las figuras definitivas puesto que depende del criterio del plegador la asignación del modo valle o monte a cada doblez y la consecución de las fases sucesivas del plegado desde la primera a la última.
> Pero el valor del *TREE MAKER* (*Constructor de paloides*) es que combina novedad y eficacia: Los modelos que se obtienen son, por lo general, las soluciones más eficaces de entre las posibles a partir de un *paloide* y son, frecuentemente, estructuras completamente nuevas en el mundo del origami.

Tan sólo habría que añadir que el *paloide* es la figura esquelética intermedia entre la fotografía del animal - objeto (una lagartija, una cabra, etc. tal como se ven en el campo) y la fotografía que puede obtenerse al final de la elaboración papirofléctica a partir de un cuadrado de papel. Hay que señalar que esta última es el resultado de afinar una base definitiva, aunque previa.

Observen cómo R. Lang califica este proceso: Es fácil el paso de la primera foto de campo al paloide, difícil la transición de éste a la base definitiva y fácil (para un experto plegador) el último paso al modelo final en papel.

Continúa nuestro autor:

Todo esto conduce a otra pregunta: Si eres un papiroflecta (o intentas serlo), necesitas usar el *TREE MAKER* (*Constructor de paloides*)? La respuesta es: sin duda alguna, no. La generalidad de papiroflectas técnicos no lo usan; de hecho, yo tampoco lo uso en la mayoría de mis propios diseños. Para lo que sí lo uso, decididamente, es para tanteos rápidos de diversos prototipos de pliegues en una base antes de decidirme por el definitivo. Para eso es una herramienta de incalculable valor, dentro de las de mi arsenal. Sin él no hubiera podido diseñar algunas de mis obras, particularmente ciervos, el escorpión o la langosta de Maine.

SEIS

En **CINCO** hablé de un hipotético miriápodo que me dará pie ahora para una nueva aclaración al texto de mi libro **Matemáticas y Papiroflexia** (INCENTRO e HIPÉRBOLA, pág. 63 y siguientes).
http://www.caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/Extraordinario%202000.pdf

Se trata de relacionar el teorema de Fushimi sobre el incentro, con el desarrollo que Toshiyuki Meguro hizo a propósito del incentro y la hipérbola, aplicando esa relación, en esta ocasión, a la *recogida de papel* que se precisa en la elaboración de toda obra plegada.

Antes he dicho que lo deseable de un buen diseño es tener los nodos de los extremos de los apéndices de las figuras asentados en los lados del cuadrado de partida (Fumiaki Kawahata). Imaginemos pues que, mediante el *paloide* del miriápodo hemos logrado una forma de plegado como el de la Fig.3 (un cuadrado plisado en espiga; en él se destaca dentro de un gran círculo lo que luego se amplía. Las líneas continuas indican pliegues en monte y las discontinuas, en valle).

Fig. 3

Los nodos centrales de la espiga muestran una angulación de 60, 120, 120, 60 grados para sus caras, es decir, la necesaria para su aplastamiento (ángulos alternos suplementarios; 3 plegados en monte – 1 plegado en valle = 3 plegados en valle – 1 plegado en monte = 2).

En el lado superior del cuadrado se ven los nodos vacíos representando los puntos terminales de los apéndices (extremos superiores de las líneas en valle), y los nodos llenos que han de recogerse hacia el interior del papel, a la hora de plegar. Otro tanto ocurre con el lado inferior del cuadrado aunque ello no esté a la vista en esta figura 3.

La Fig. 3 constituiría lo que F. Kawahata llama *línea básica* que es el resultado de acomodar el *paloide* en el cuadrado de papel que se va a plegar. R. Lang llama a esa línea *la de los caminos críticos* y de ella dice que es difícil de conseguir además de advertir de que muestra todos los dobleces de una de las múltiples maneras de llegar a lograr el modelo de plegado definitivo, insinuando así que deja al artista plegador amplia libertad de ejecución de los pliegues sucesivos.

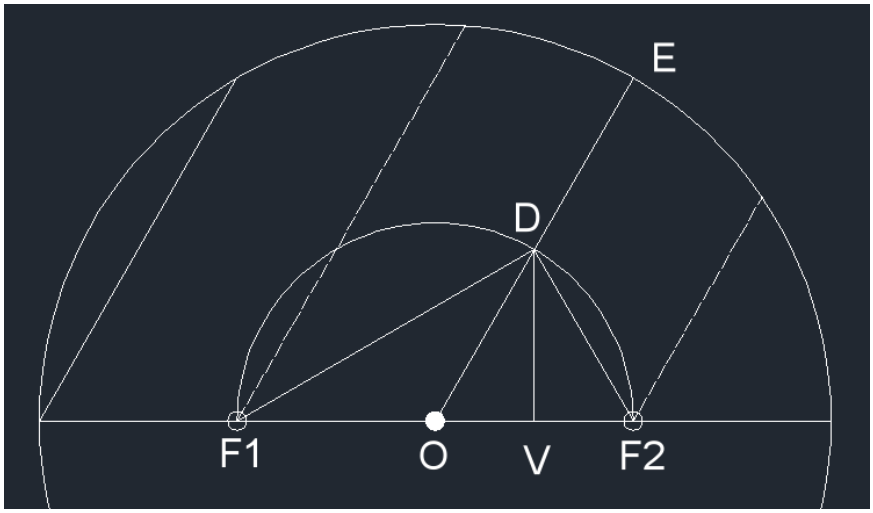

Fig. 4

La Fig. 4 (lo encirculado de la Fig. 3, ampliado) nos permite ver los parámetros de una hipérbola asentada en el plano coordenado de origen O que obedece a su ecuación canónica. El único punto de la curva mostrado en dicha Fig. 4 es V, su vértice. La ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

F1 y F2 son los focos
O, su centro y V su vértice.
a = OV
b = VD
c = OF1 = OF2 = OD, de manera que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

De la ecuación se deduce:

$$y = \frac{1}{a}\sqrt{b^2x^2 - a^2b^2}$$

Dando valores a x en esta última igualdad obtenemos las parejas (x , y) que expresan la posición en el plano de los diversos puntos de la hipérbola.

La tangente en un punto cualquiera de la hipérbola valdrá y / x siendo

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2x^2 - a^2b^2}{x^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando x tiende a infinito resulta que y / x = b / a = VD / OV, es decir, la dirección OD es la de la asíntota de la hipérbola puesto el punto del infinito de ésta dirección es el de su tangencia a la curva que ocurre para x = ∞. OD es, pues, un segmento de la asíntota puesto que pasa por el centro O de la hipérbola.

En la Fig. 4 se aprecia también que el nodo D es aplastable para los ángulos EDF1; F1DV; VDF2; F2DE, puesto que cada dos, alternados, son suplementarios.

Ello es así porque el ángulo recto en D está dividido en tres partes iguales ya que el ángulo agudo de la espiga mide 60º (DOF2 es un triángulo equilátero al ser su ángulo en O = 60º y los lados OD y OF2 iguales). Además, también es DF1O = ODF1; DF1V = VDF2; ODV = VDF2 (todos iguales a 30º).

Todo esto, que es cierto para la forma de espiga de Fig. 3, vale también para cualquier otra disposición de la espiga puesto que lo único que la define es su ángulo agudo α y su paso.

Supongamos que, conservando el paso (F1OF2) alteramos el ángulo agudo de 60º para que pase a ser EDOF2 = α (Fig. 5, con las líneas de espiga más inclinadas a la derecha que las de la Fig. 4)

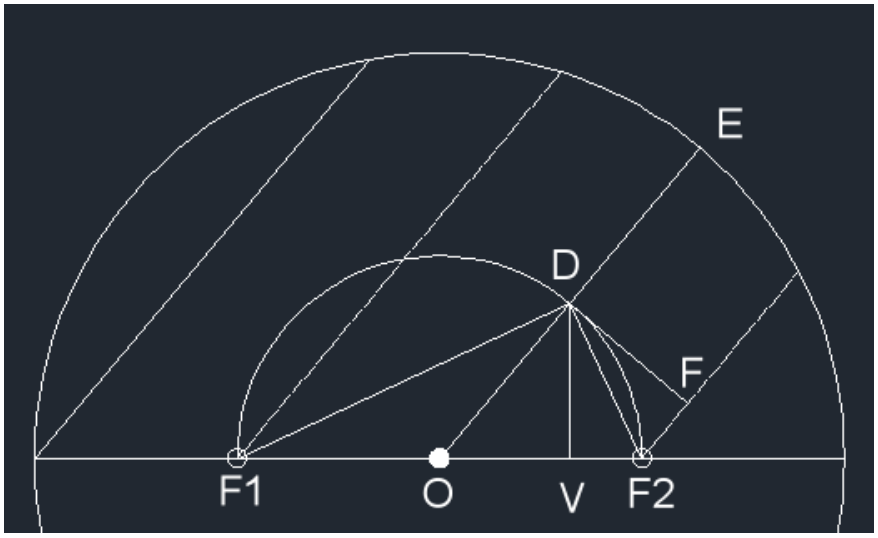

Fig. 5

Observando dicha Fig. 5 se ve que los ángulos menores de su triángulo isósceles miden α / 2, lo mismo que los ángulos menores de los dos triángulos rectángulos con vértice D e hipotenusas comunes. Estos cuatro ángulos tienen, respectivamente, sus lados perpendiculares.
El resultado es que
EDF1 + VDF2 = 180º
Y que
EDF2 + F1DV = 180º

Es decir (Fig. 6), los cuatro ángulos del nodo D, tomados como parejas en orden alterno, son suplementarios. Así mismo ocurre que 3 líneas en monte menos 1 en valle (la DV), es igual a 2.
Conocer el ángulo agudo de la espiga y su paso es conocer el parámetro c de la hipérbola con el que se puede hallar b = DV y a = OV.

Se ve, pues, que variando la angulación de la espiga se varía la posición del vértice V de la hipérbola entre su centro O y su foco F2, pero se conserva la posibilidad de aplastamiento del nodo D al ser DE (E de Fig. 5) la asíntota de la hipérbola. En la Fig. 6 se puede apreciar el nodo D con sus tres líneas de plegado en monte y una en valle, así como un tramo de la asíntota desde D y otro de la curva, obtenida por puntos, desde el vértice V (obsérvese la tendencia al acercamiento de la curva a su asíntota).

Sólo me queda recordar que DV es el lugar geométrico de los incentros de los triángulos de base F1F2 que tienen como vértice superior los diversos puntos de la hipérbola. Esto ya se vio en la Pág. 65 de mi libro.

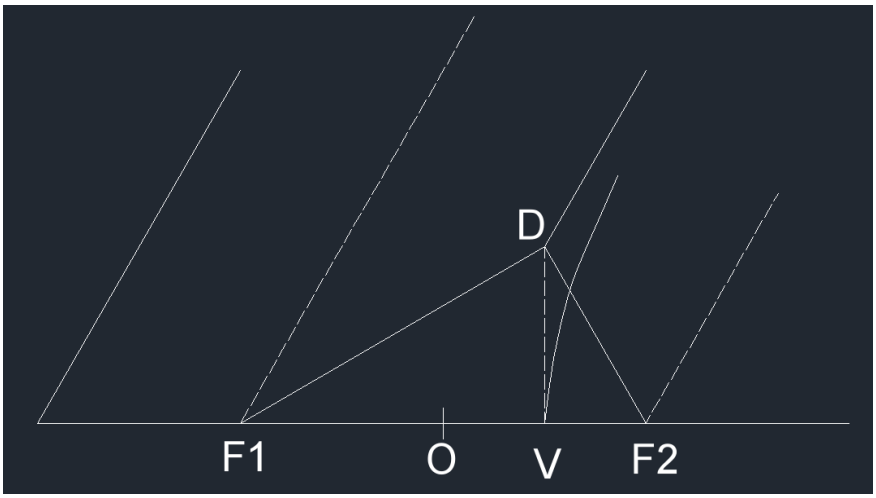

Fig. 6

SIETE (más sobre CPs)
En su conferencia, R. Lang puso un sencillo y bello ejemplo que expresa la relación entre un ave (de su propio diseño, entiendo) y su CP.

Entre ambos (Figs. 7 y 8), y dada su sencillez, se aprecia la inexistencia, por innecesaria, de la fase de afinado mencionada en **CINCO**.

En la Fig. 8 se ve cómo la imagen es perfectamente aplastable, de acuerdo con todo lo dicho hasta aquí; pero ello es desmentido por la 7.

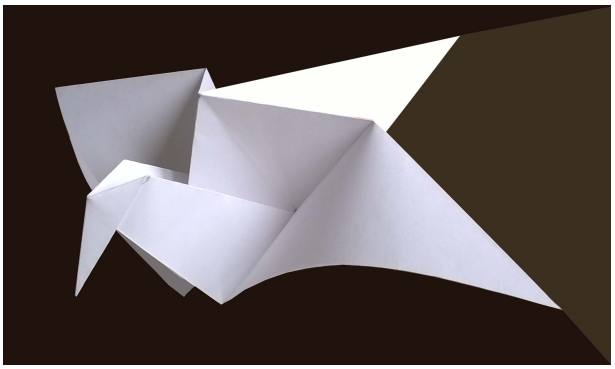

Fig. 7

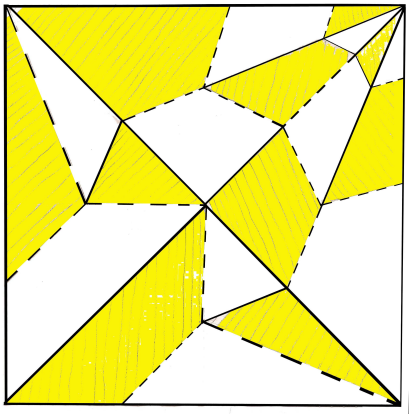

Fig. 8

De donde se deduce que, a veces, un defecto se puede convertir en una gran ventaja. Aquí, el defecto, es la suma de mi falta de habilidad plegatoria y del que introduce el espesor del papel. La Fig. 7 podría aplastarse completamente, pero no exactamente por las líneas de la 8. He preferido dejarla a su aire, sin forzarla al aplastamiento para aprovechar la natural curvatura de la punta de las alas que da a éstas una realista sensación de estar aleteando en el vuelo. A ello contribuye el hecho de que la superficie de la punta del ala no es un triángulo, sino un cuadrilátero que bien puede ser *no plano*. En la Pág. 65 de mi libro trato los cuadriláteros aplastables relacionándolos con el Teorema de Poncelet.

Enfatiza R. Lang lo que se ve en la Fig. 8: en un CP se pueden colorear sus figuras internas de tal manera que no haya necesidad de que dos de ellas adyacentes sean del mismo color (principio topológico).

Simetrías y asimetrías puestas de manifiesto. La diagonal del cuadrado entre los vértices superior derecho (pico y cabeza del ave) e inferior izquierdo (punta de la cola) es el eje de simetría bilateral del pájaro. La otra diagonal, en cambio, no induce simetría alguna: es la línea de envergadura de alas.

A mí, esto de las simetrías me suele traer de cabeza y me recuerda lo de aquel soriano desconfiado (como era de esperar), que un caluroso día de verano viajaba en el tren junto a la ventanilla. En una estación del trayecto entró un paisano que se sentó frente al soriano. Mientras aquel se acomodaba y miraba al campo, se produjo este breve diálogo:
-El paisano: ¡Hay que ver el calor que hace; ya se ve que hasta han esquilado las ovejas!
-El soriano: Sí, por lo menos del lado de acá.

Seguiré con otros ejemplos de dificultad creciente. Primero la grulla de Fig. 9, que vino volando desde Japón donde ya en 1797 jugaba con los niños japoneses según nos cuenta R. Lang.

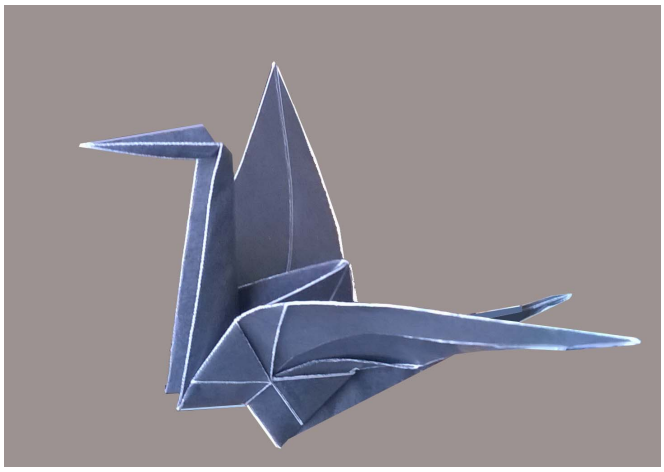

Fig. 9

Fig. 10

Llegó a Madrid un día nubloso. Como mi hija es un tanto despistada y se había dejado abierta una ventana, se coló por ella (Fig. 10). Yo aproveché la ocasión para anillarla y averiguar algunas cosas. Había sido construida bajo especificación de Isao Honda a partir de la base de pájaro y con sólo tres últimas fases de afinado.

La desmonté para obtener su CP (Fig. 11), la volví a montar y la encaminé a la AEP (Asociación Española de Papiroflexia) para que allí pudiera hacer amistad con su colega *PAJARITA* de la que ya había oído hablar, según pude comprobar.

Dicha Fig. 11 muestra varias cosas: Las puntas de las alas en una diagonal; la cabeza con el pico y la cola, en la otra. Esta última diagonal determina una simetría perfecta mientras que la otra, a causa de la cabeza, la pierde por muy poco.

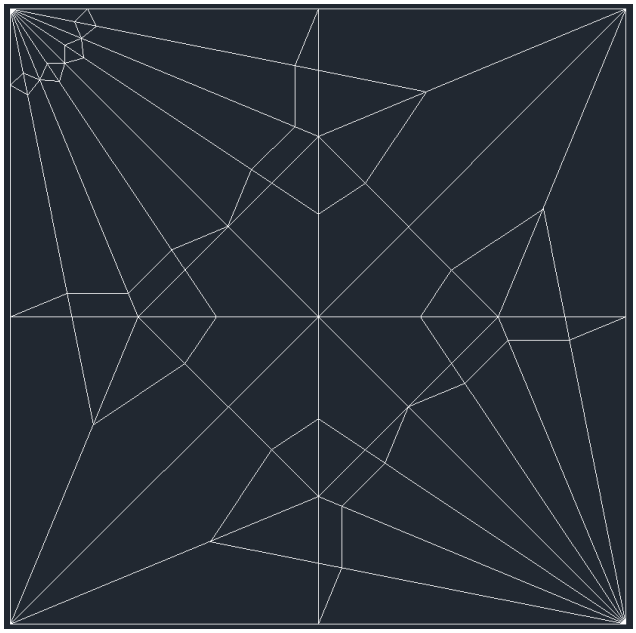

Fig. 11

Así como en la Fig. 8 fui capaz de distinguir los dobleces monte y valle, dada la sencillez de la construcción, en la 11 ya no me resultó posible. Sin embargo, un plegador con mediana experiencia y teniendo a la vista una pieza terminada, sí podrá plegar la grulla, a partir de un cuadrado de papel y teniendo delante la Fig.11 como si fuera un resumen de todas las fases del proceso de plegado.

El último caso que veré es el de mi querida cabra montés (Fig. 12) que hace años tengo construida según proceso de J. Montrol: Ahí la tengo, tan airosa ella, encaramada en un roquedo de papel.

Fig. 12

El cariño que le profeso me llevó a evitar el sacrilegio inútil de desmontarla para obtener su CP. El largo y complicado proceso de plegado consta de 51 fases, cosa que me hizo pensar que el CP completo debería terminar en un incalculable amontonamiento de dobleces sobre el papel cuadrado de partida: es decir, en un resumen complejo y de problemática interpretación para reproducir las sucesivas fases, en orden y desde la primera a la última.

Lo que hice, en cambio, fue empezar a plegar la cabra desde su primera fase, registrando los dobleces que iban surgiendo. Así llegué hasta la fase 21 que es lo que recoge la Fig. 13.

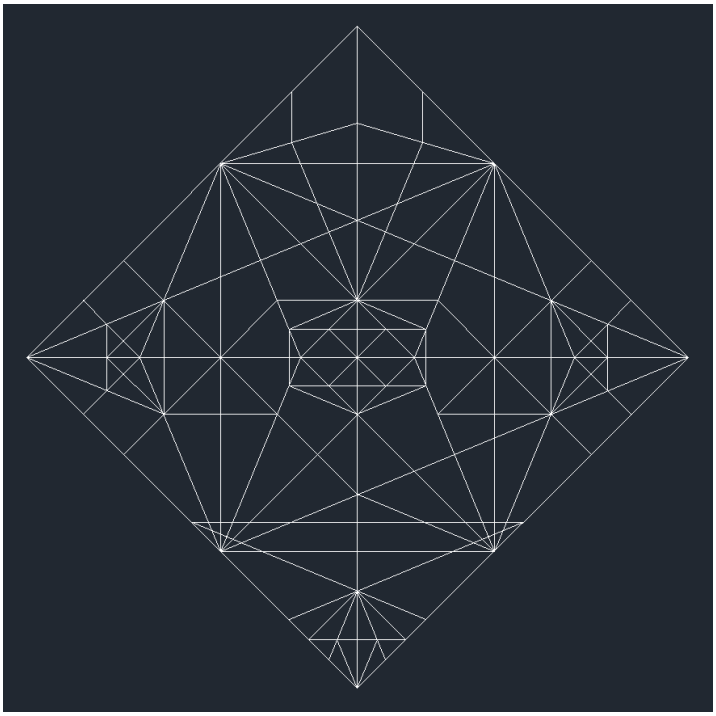

Fig. 13

Así pues, aunque incompleto, el CP de la Fig. 13 muestra varias cosas:

-El eje de simetría bilateral de la diagonal vertical. Su vértice inferior está dispuesto a acoger la cabeza aunque no registra aún el morro, orejas y cuernos. El vértice superior está reservado al trasero, con su cola. La diagonal horizontal refleja la asimetría de cabeza y cola.

-El gran rectángulo apunta en sus vértices superiores a las patas y en los inferiores, a las manos de la cabra.

-Resulta prácticamente imposible discernir entre dobleces en monte y en valle porque hay una mezcla profusa de líneas auxiliares y activas, de líneas que cambian de modo al afectarse de hundidos, de plegados inversos, etc.

-En verdad, no se me alcanza la utilidad de un CP tan complejo, máxime si está completo. A menos, claro está, que una aplicación para ordenadores sea capaz de ir actuando sobre las líneas de plegado para ir activándolas de manera sucesiva en simulación de lo que ahora hace un plegador cuando sigue un proceso de plegado por fases. Algo así como la manera en que se despliegan automáticamente ciertos ingenios modernos.

-Lo que no dudo es que estos CPs sean unas verdaderas obras de arte abstracto.

OCHO
Lo de plegar y desplegar es tan útil y antiguo como el paraguas. Con esto empieza Kawahata su artículo que titula *La técnica del plegado en el arte constructivo del Origami.* Y con esto termina también R. Lang su conferencia.

Cita éste nuevos ingenios plegables y desplegables al amparo de las avanzadas tecnologías actuales, tales como los *airbags* de protección en automóviles, las lentes de los telescopios orbitales o los paneles solares de las naves espaciales. Yo quiero añadir un par de ejemplos que me impresionan sobremanera. Con eso termino.

El posado y despliegue del robot *Curiosity* en Marte el 5 de agosto de 2012 (coincidiendo con la Olimpiada de Londres), y la operación de corazón a que será sometida dentro de unos días la mujer de uno de mis amigos. Consiste aquella en implantarle una válvula tricúspide hecha con tejido cardiaco de buey que ha de ser transportada mediante un catéter en cuya punta va plegada la nueva válvula, desde la ingle hasta el corazón donde será desplegada para quedar asentada en su lugar preciso.

Bibliografía
http://www.elconfidencial.com/tecnologia/2016-02-13/las-matematicas-escondidas-en-el-arte-del-origami_1151347/

RECORDATORIO 77
UNO

Acabo de recibir de mi amigo Rafael Bueno una valiosa información en forma de "*Guía de la minería* en Linares". Es un relato muy bien ilustrado de lo que fue el esplendor de la ciudad y su comarca en el siglo comprendido entre mediados del XIX y mediados del XX. Sin olvidar sus antecedentes romanos y cartagineses.

A este último respecto me fijaré en dos palabras clave que aparecen en la Guía: Cástulo y Aníbal.

Cástulo muestra ahora las ruinas de la ciudad hispano-romana que fue capital de Oretania en la que se acaban de descubrir unos bellos, completos y extensos mosaicos romanos. Está muy cerca de la explotación agropecuaria modélica llamada Torrubia que yo frecuentaba (no confundir con el pueblo del mismo nombre que también está cerca de allí). Habría que decir, pues, que Linares era un pueblo oretano próximo a su capital, y con una extensa zona de influencia minera (plomo y plata) que para eso los romanos tenían un excelente olfato.

Lo tenían no sólo para encontrar menas de interés, sino para encontrar aplicaciones a su propio olfato. Recuerdo haber visto en las ruinas de la ciudad hispano-romana de Uxama (Osma, cerca de Burgo de Osma) cómo una importante conducción de agua, de sección cuadrada, estaba recubierta en todo su interior por una lámina de plomo. A lo largo de mi vida yo he habitado sucesivamente casas con tuberías para agua hechas de plomo, de hierro y últimamente, de cobre.

Oretania era una región ibero-romana en la frontera sur del Imperio lindando por allí con los dominios cartagineses en que habían sido convertidas prácticamente toda Andalucía y antes la costa norte africana desde Cartago (Túnez) hasta el estrecho de Gibraltar. Y no sólo Andalucía; los cartagineses llegaron hasta Cartagena (Cartagonova), el gran puerto que necesitaba su potente escuadra para evitar el largo desplazamiento hasta el Estrecho, para poner pie en Hispania.

En definitiva, los fenicios (libaneses, que no exactamente judíos) habían conseguido llegar a dominar la orilla de enfrente de su mar (el Mediterráneo) ya que los cartagineses no eran otra cosa que un asentamiento fenicio a mitad de camino (en Túnez, si bien constituyendo una colonia muy independiente).

Como se sabe y, como cabía esperar de toda *buena* vecindad, romanos y cartagineses (éstos llamados púnicos) se pelearon y dejaron de pelear con frecuencia. Y no sólo en Hispania, sino incluso en Italia, en Sicilia, especialmente. Y es que eran los autóctonos los que se arrimaban a un bando o a otro cada vez y según conveniencia propia.

En uno de estos vaivenes oretanos Aníbal, el líder cartaginés, llegó a casarse con la princesa Himilce (es decir, con una linarense) hija de Mucro, rey de Cástulo. La boda se celebró en el 220 aC por todo lo alto, y en Cartagena, así que ¡Viva Cartagena! La boda tuvo lugar entre la 1ª y la 2ª Guerra púnica.

Aníbal no se detuvo en Cartagena para afirmarse en lo de la orilla oeste del Mediterráneo. Siguió hacia el norte y, dos años después de su boda puso sitio al enclave hispano-romano de Sagunto destruyéndolo para seguir más al norte cruzando los Pirineos y los Alpes a fin de acercarse victorioso a Roma. Con Sagunto había empezado la Segunda Guerra Púnica.

NOTA
Desde finales del siglo XIX gritar en España "Viva Cartagena!", es un recurso fácil o hábil, para salir de una situación comprometida o para conseguir una adhesión. Seguramente fue esto último lo que movió a Aníbal a casarse con la chica, y en Cartago-Nova.

El matrimonio tuvo un hijo y ella vivió en Cartagena donde murió (fue enterrada en Cástulo) mientras su marido luchaba en Italia contra los romanos. Esta lucha apuntó al declive de Aníbal que fue derrotado definitivamente en la batalla de Zama (202 aC, Túnez). Antes de morir Himilce y, seguramente visto el porvenir de su marido, se pasó al bando romano. Aníbal ya no participó en la Tercera guerra Púnica porque se suicido en el 183 aC. Su vencedor en Zama había sido el general romano Publio Cornelio Escipión *el africano*.

Y ahora entro yo en escena, verán. Cualquiera que conozca mi currículo tal como está en Quien sabrá que soy un arévaco de Celtíberia: Tanto como oretanos han sido Palomo Linares, Andrés Segovia o Raphael.

Bueno, celtíbero ciertamente lo soy pero dudo si seré muy arévaco. Lo digo porque Numancia sí era ciudad arévaca pero sus habitante huelen a chamusquina desde que en 134 aC Publio Cornelio Escipión Emiliano (*el africano menor* y nieto del que fuera el verdugo de Aníbal en Zama) decidió facilitarles su incineración antes de que fueran cadáveres.

Sólo me quedan un par de flecos relativos a Aníbal. En la *Guía de la minería* en Linares el nombre de Aníbal solo aparece como el de un moderno hotel construido en la ciudad recientemente. Y una peculiaridad: Aníbal Voyer, a la sazón Vicepresidente de la Asociación Española de Papiroflexia cuan-

do publicó mi libro *Matemáticas y Papiroflexia* había nacido en Linares después de mi marcha de allí en 1969. Nunca me lo planteé, pero a la vista de lo que llevo visto, no me extrañaría que su nombre pueda tener que ver con el del General cartaginés.

Lo cierto es que todo lugar de prosperidad creciente atrae gente de otros sitios por lejanos que sean. A Linares llegaron, siguiendo a sus inversores británicos, mineros de Cornualles especializados en la extracción de cobre y estaño, cuando sus minas anunciaban agotamiento. Pero el Linares próspero también acogió gente más próxima. Mi amigo Rafael Bueno me cuenta que su abuelo se fue allí a trabajar de administrativo en una mina, desde Albacete donde residía. Yo mismo también emigré a Linares cuando vivía en Córdoba, succionado por el desarrollo industrial que crecía en Linares después de la desaparición de su actividad minera.

De Córdoba me fui con mi familia en la que ya contaba mi hijo Javier allí nacido. Tenía un año cuando llegamos, y 9 cuando nos marchamos, definitivamente, de Linares a Madrid. Así pues, el niño vivió en Linares su infancia con una duración exactamente igual que la mía en San Vicente de la Barquera. Mis propios recuerdos me han explicado los de mi hijo en aquel periodo: la situación de la Estación de Madrid, hoy convertida en museo de la minería, el Hospital de los Marqueses de Linares donde el mismo cirujano que le salvó a él la vida no pudo salvar la del torero Manolete en 1947.

El hospital al que me refiero fue fundado por los Marqueses de Linares cuando el auge minero para atender a los hombres de la mina en sus problemas de salud, especialmente traumatismos y silicosis. Dichos marqueses habían llegado a ser unos de los españoles más ricos. De origen vasco y actividades de negocio en Cuba y de ferrocarriles en España, construyeron su bello palacio en una de las cuatro esquinas de la plaza madrileña de Cibeles. Hoy sede de la Casa de América, tiene sólo un defecto: ¡que su vecina edificación de la calle Alcalá no tenga un par de pisos menos!. Ah, y otro detalle: uno de los arquitectos que participaron en su construcción también se llamaba Aníbal. Y uno más: en el palacio se rodó la genial película de Berlanga con guión de Rafael Azcona “Patrimonio Nacional” antes de estar completamente adecentado.