Curvas de PEANO

Acabo de terminar un artículo que he titulado *FRACTALES.* Al final me he tropezado con las curvas de Peano que resultan ser también fractálicas; me ha parecido excesivo incorporarlas al escrito, así que les voy a dedicar otro porque creo que merece la pena, dada su singularidad.

Fue Giuseppe Peano un matemático italiano (1858-1932) que se especializó en matemáticas no euclídeas con resultados sorprendentes en materia de llenado de superficies y de volúmenes a partir de líneas quebradas.

En *FRACRALES* digo que Mandelbrot afirma que *los conjuntos con dimensión D no entera, son fractales*. Y más adelante, en su mismo libro, asegura que hay *otra banda de buscadores del << a mitad de camino>>* .

Yo no veo otra manera de interpretar esto último que imaginando lo siguiente. Supongamos la superficie plana de un cuadrado de lado *a* (D = 2, dos dimensiones) y, en su interior, una línea quebrada formada por numerosos segmentos (de D = 1, cada uno, con una dimensión); esos segmentos podrían cruzarse todo lo que se quiera emborronando a capricho la superficie. El resultado sería haber conseguido que una línea unidimensional se convirtiera en un borrón bidimensional.

Lo que hizo Peano fue poner orden en todo eso. Pensemos que el cuadrado está integrado en una cuadrícula regular y que su lado *a* está dividido por n nodos; dicho cuadrado tendrá un total de n^2 nodos.

A continuación decidió que la línea quebrada en cuestión debería estar compuesta de segmentos iguales de longitud *a* / (n – 1) de tal manera que dos tramos consecutivos formen un ángulo de 90 º o de 180º y que la línea quebrada habría de tener todos sus vértices en todos y cada uno de los nodos del cuadrado, es decir, dicha línea quebrada habría de pasar una sola vez por cada uno de ellos, teniendo un nodo de inicio y otro de final.

No voy a entrar en las líneas planas de Peano que están muy bien estudiadas y representadas en forma de variadas soluciones, y voy a ocuparme de sus variantes tridimensionales que han de regirse por exigencias análogas a las bidimensionales. Debo añadir que esa ocupación ya me resultó familiar una vez, cuando desarrollé mi trabajo sobre los tubos acodados en el espacio.

Para dar una idea de lo que entraña esto, copio lo que al pie de la página 286 del libro de Pickover, en la que se refiere a la curva de Peano, escribe el autor, para explicar la imagen que yo utilizo como Fig. 1.

> El cubo de Hilbert es una extensión tridimensional de las tradicionales curvas de Peano. Esta escultura de bronce y acero inoxidable, obra de Carlo H. Sequin (de la Universidad de Berkeley) mide poco más de diez centímetros.

La belleza de la Fig. 1 no sólo no evita la dificultad de su construcción, sino que la agranda. Obsérvese que la línea quebrada es pura, no tiene redondeos en sus nodos, y que, sobre todo, no es línea

porque tiene grosor. No he encontrado en parte alguna el algoritmo que puede generar tanta hermosura.

¿Alguien se imagina lo que puede haber dentro de esa línea quebrada gorda y cúbica que nos llama la atención desde sus claras aristas vistas, pero que contiene 512 nodos y, por tanto, 511 tramos?

Copio del libro de Pickover:

> Las curvas de Peano son continuas, pero no tienen tangente única en ningún punto, como ocurre con **el copo de nieve de Coch** o **la función de Weierstrass**. Todas las curvas que llenan el espacio tiene una **dimensión de Hausdorff** igual a 2.

He intentado que esta figura, u otras por el estilo, incluso más sencillas, me dieran la pista para construir yo algo semejante en modo alámbrico. Con escaso éxito me puse manos a la obra para comprobar que, lamentablemente, la dificultad crecía a medida que me acercaba al núcleo del cubo: Unos segmentos tapaban a otros haciendo imposible la tarea.

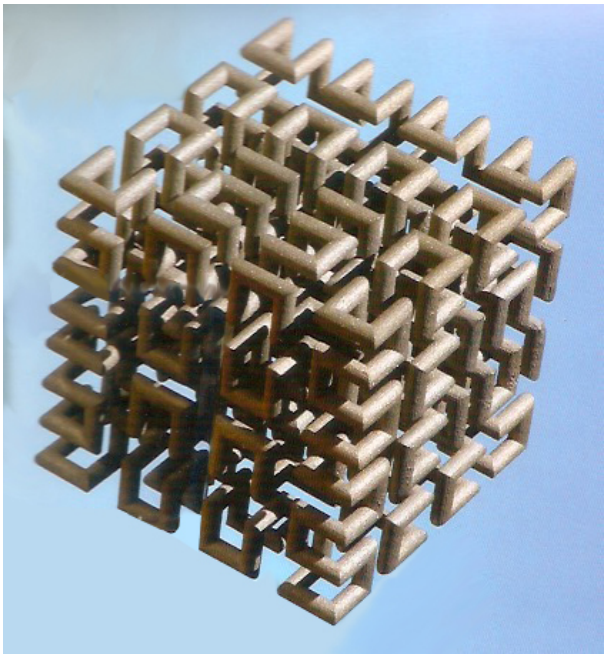


Fig. 1

Mi idea era construir primero la figura en LIBRECAD, para luego materializarla con alambre. Acudí a representar un cubo con todos sus nodos, en perspectiva isométrica (como la de la Fig. 1): Desconcierto total, al confundirse líneas que se cortan con otras que se cruzan.

Cambié la forma de cubo por la de prisma a fin de salirme de la isometría, y simplifiqué el contenido de la figura limitando a 4 los nodos de cada arista del prisma. Ello conlleva, naturalmente, que la longitud de los tramos de la línea quebrada espacial sea distinta según cada una de las tres coordenadas.

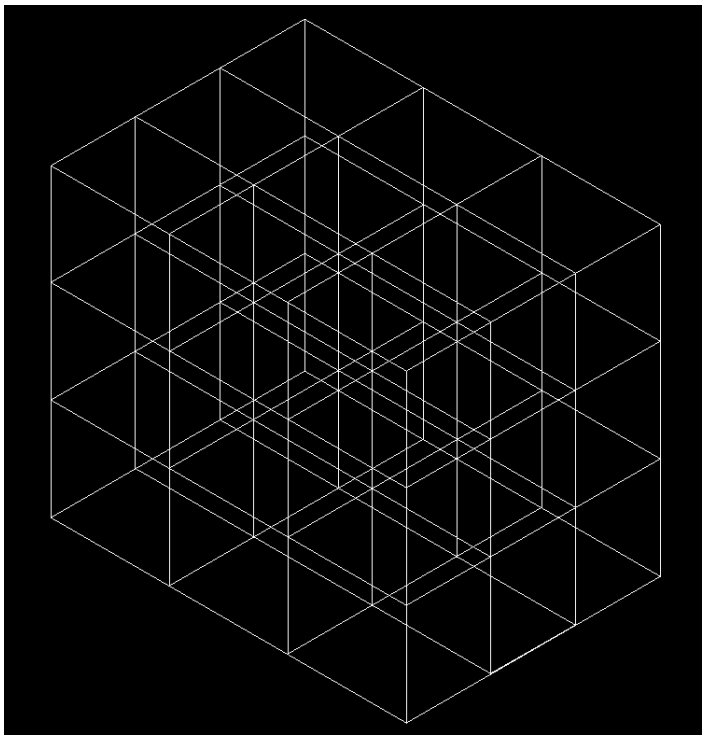
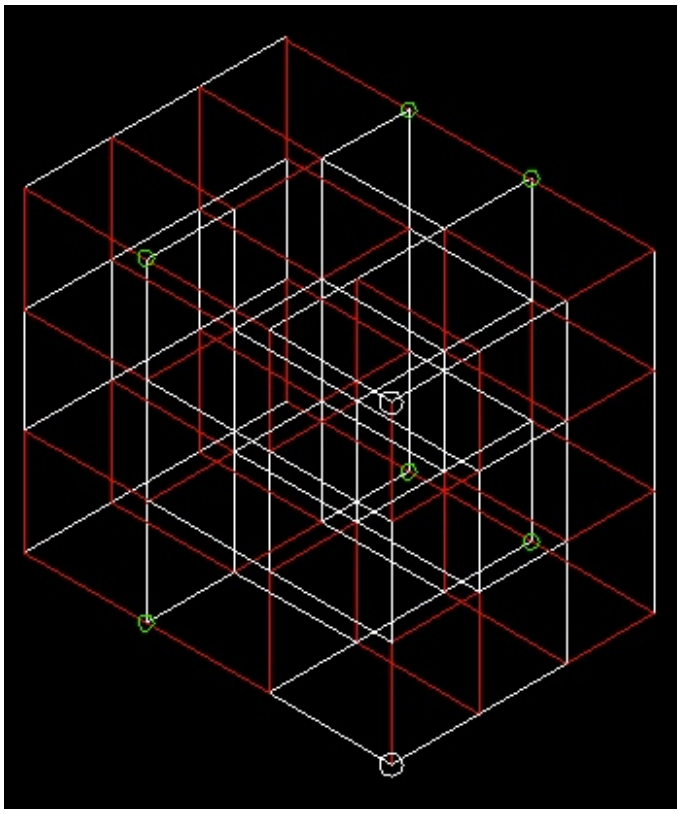


Fig. 2

Aún así la cosa resultaba difícil porque el total de nodos del prisma era de $4^3 = 64$; y el de tramos de la línea quebrada, 63. La Fig. 2 muestra ese prisma en el que se pueden contar los 64 nodos y los 63 segmentos, y ver que existen varios falsos nodos que llevan a confusión.

Todo esto ayuda, pero no resuelve lo principal del problema, que es hallar la ruta que han de seguir los tramos de la línea quebrada para pasar una sola vez por todos y cada uno de los nodos.

Después de muchos tanteos (*try and cut*, que dicen los ingleses; mi hila Mª Jesús lo llama *prueba y error*) conseguí la solución que se ve en la Fig 3. Obsérvese que en ella hay 6 nodos cuyos tramos están a 180º (circulados en verde).



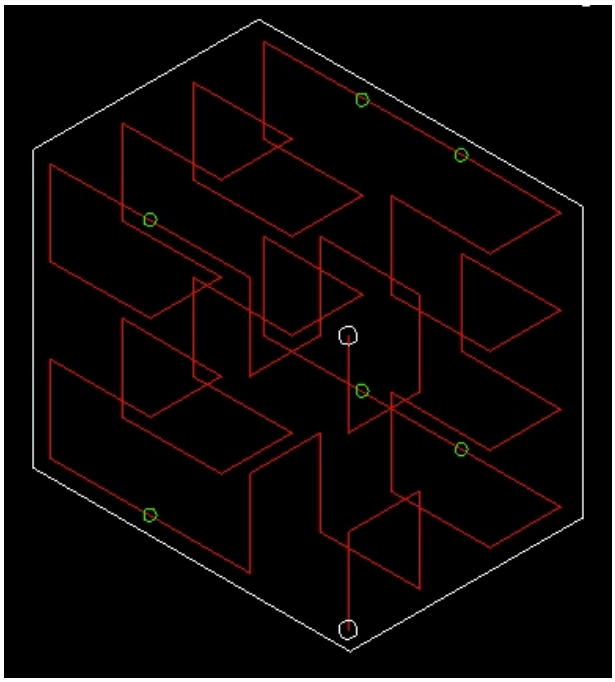
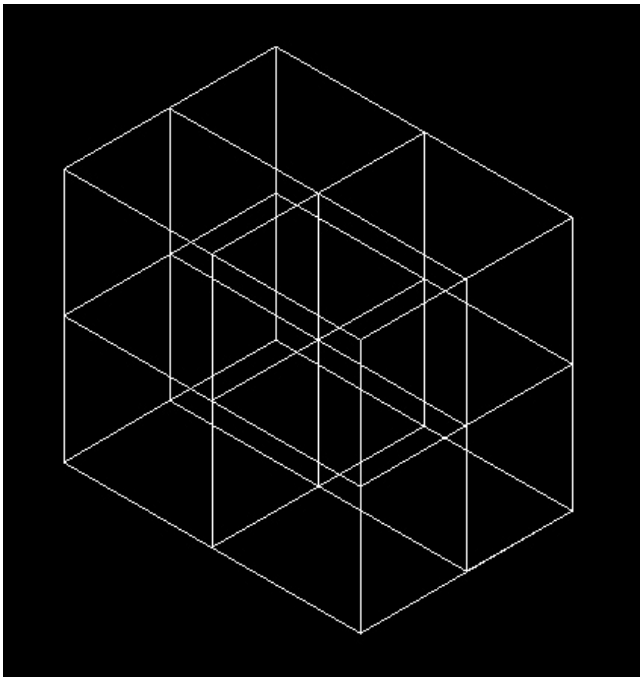


Fig. 4

Fig. 3

En la Fig. 4 se aprecia más claramente la trayectoria de la línea quebrada con sus nodos extremos circulados en blanco; en ella se pueden contar con facilidad los tramos y los nodos. Lo que no he podido es sacar la fórmula del algoritmo generador. Seguro que algún lector podrá.

A pesar de disponer de la Fig. 4, no me veía capaz de construirla con el alambre fino de latón que pude conseguir; ya no estaba disponible el delgado cable de cobre recubierto de plástico que usé en otras ocasiones; ahora necesitaba unos alicates de difícil manejo en el núcleo de la construcción.



Opté entonces por clarear dicho núcleo a base de un prisma con arista de 3 nodos en vez de los 4 de las Figs. 2, 3 y 4. Así resultó la Fig. 5.

Vista la experiencia anterior, y para evitar las interferencias por cruce de líneas, redibujé la Fig. 5 separando los planos horizontales superior e inferior, del central. Así conseguí la Fig. 6 de más fácil manejo.

La Fig. 7 es el regreso de la 6 a la forma seudocúbica. Y la 8 es la misma 7 con la línea quebrada liberada de la plantilla de la Fig. 5.

Fig. 5

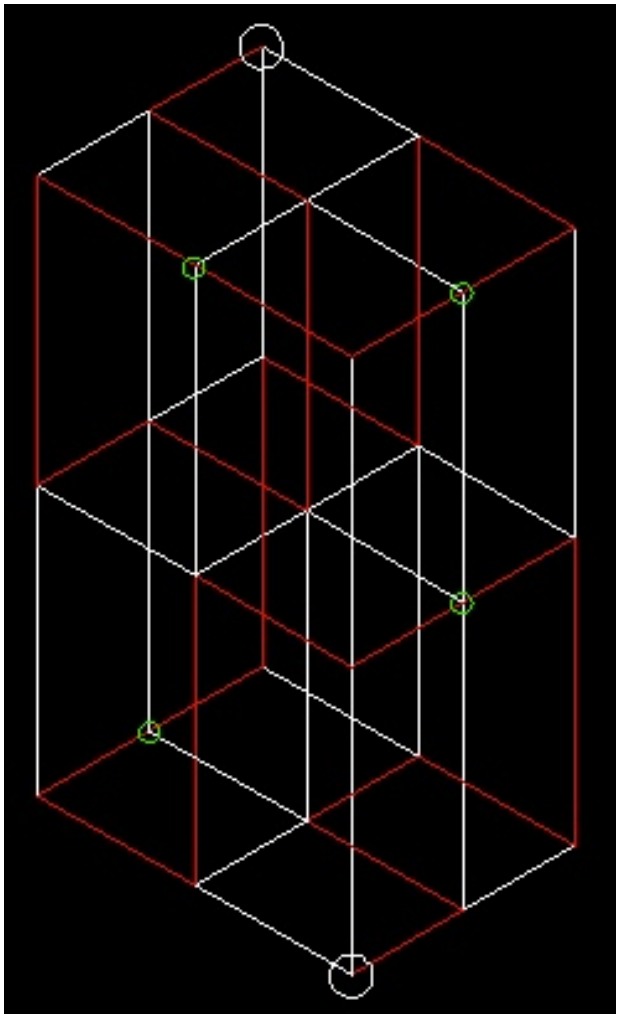


Fig. 6

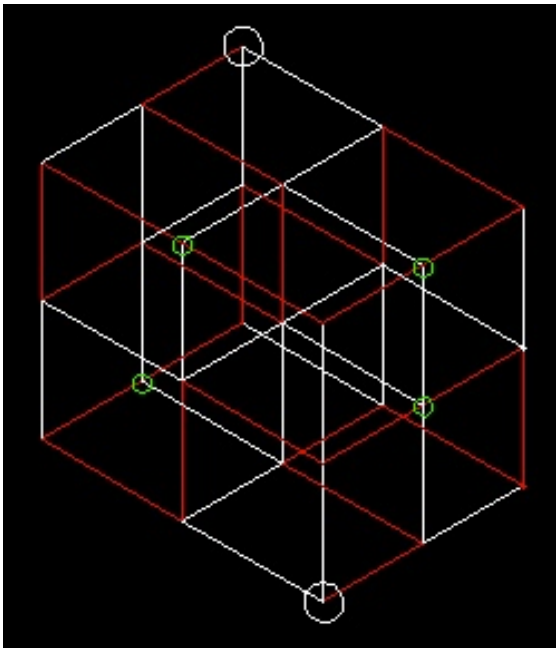


Fig. 7

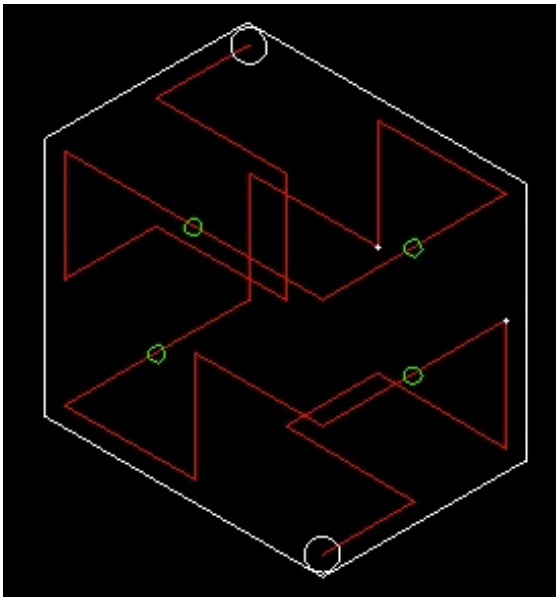


Fig. 8

<u>NOTA</u>
En el texto he conservado todo lo relativo al alambre de latón, pero he cambiado la Fig. 9 por otra ejecutada con cable eléctrico que es más perfecta.

Esta Fig. 8 es la que me ha servido para materializar la versión alámbrica, ayudado de unos alicates (Fig. 9).

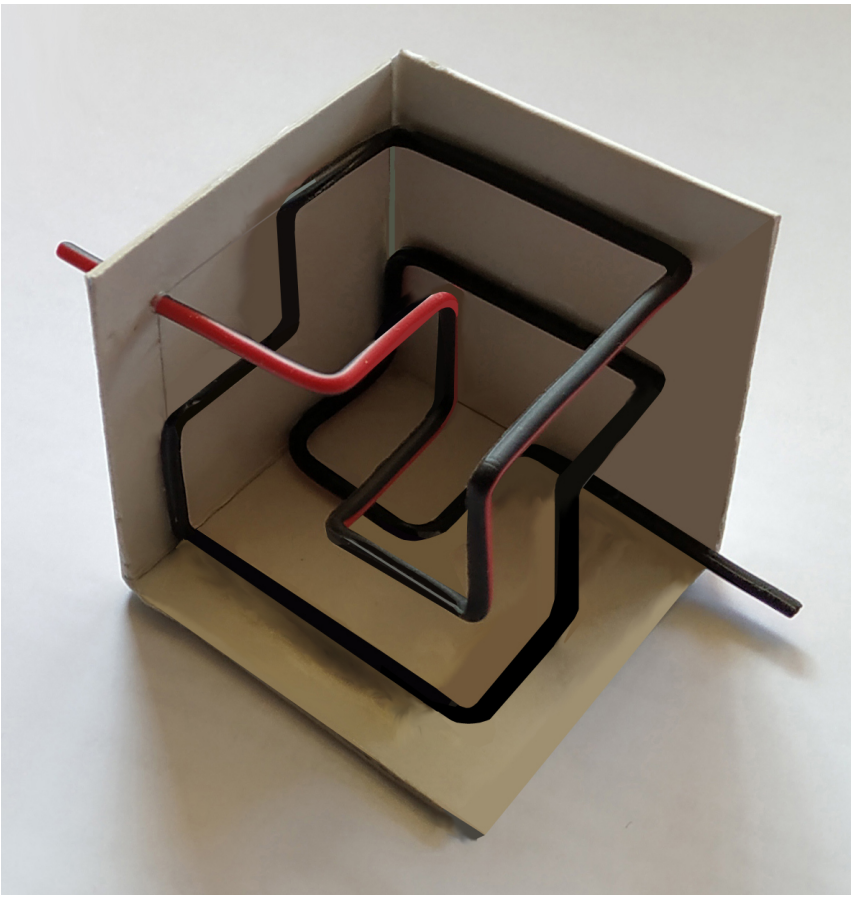


Fig. 9

Bien y, todo esto ¿Qué tiene que ver con el fractalismo? Describamos la Fig. 9.

d = diámetro del cable = 0,8 mm.
a = lado del cubo = 40 mm.
Vc = volumen del cubo = 40^3 = 64.000 mm^3.
n = 3 nodos / arista.
Nodos en el volumen total del cubo $n^3 = 3^3 = 27$.
Tramos en el volumen total = $n^3 - 1 = 27 - 1 = 26$.
Longitud de un tramo = a / (n - 1) = a / 2 = 40 / 2 = 20 mm.
* Longitud de la línea quebrada = a / (n - 1) × (n^3 – 1) = 20 × 26 = 520 mm.
V_Q = volumen de la línea quebrada = 520 × π ($0{,}8^2$ / 4) = 261 mm^3.
La línea quebrada llena 261 × 100 / 64.000 = 0,4 % de Vc.

Para que el cable empleado en la Fig. 9 llenara el 75% del volumen del cubo, veamos el valor de n que haría falta:

$$0{,}75\, a^3 = [a / (n - 1)]\, (n^3 - 1)\, \pi\, (d^2 / 4)$$

que sustituyendo valores se convierte en esta ecuación incompleta de tercer grado

$$n^3 - 2400\, n + 2399 = 0$$

que da como resultado para la cantidad de nodos por arista n = 48 (48 nodos en la arista de 40 mm, y 48^3 = 110.592 nodos en el volumen total del cubo). Son éstas, cifras que marean pero que dan idea del salto que se produce desde un llenado del 0,4 % a otro del 75 %.

Es decir, nos encontramos con algo parecido a lo visto en el fractal de la isla: Aquí, vemos llenarse un volumen con una cantidad creciente de segmentos de línea quebrada, que son cada vez más pequeños.

Quiero expresar mi agradecimiento a los diseñadores del calculador de ecuaciones de tercer grado que han puesto en Internet, para aliviarnos de los engorrosos cálculos que había que hacer cuando los estudiábamos.

https://www.calculadoraconversor.com/ecuaciones-de-tercer-grado/

Fig. 10

Ahora, una cuestión colateral referida al llenado de volúmenes.

El famoso arquitecto Miguel Fisac lo tenía resuelto de forma distinta a la de Peano. En la Fig. 10 se ve cómo el remate del campanario de la iglesia que los dominicos tienen en Alcobendas, Madrid, consiste en un conjunto caótico de alambrillo adaptado al espacio que debe ocupar.

Yo, por mi parte, me planteo por qué dar un doble salto, de la línea al volumen, cuando puedo partir de una superficie plana de *papel pinocho* y con un simple salto, engurruñar el papel, para llenar el volumen de un cubo como el de la Fig. 11. Así contrasto harmónicamente, lo caótico con lo reglado.

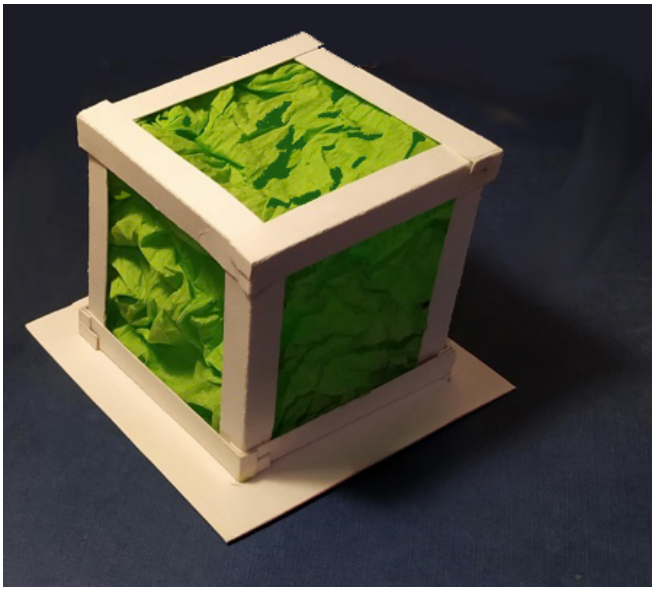


Fig. 11

Bibliografía

La geometría fractal de la naturaleza, de Benoît Mandelbrot. Editorial Tusquets, 2009. 662 páginas.

El libro de las Matemáticas, de Clifford A. Pickover (de Pitágoras a la 57º dimensión; 250 hitos de la historia de las Matemáticas). ILUS BOOKS S.L. 526 páginas.