CAPRICHOS ingenieros
Jesús de la Peña Hernández

HOLDITCH

El Teorema que el matemático inglés Rev. Hamnet Holditch (reverendo *noterrasques*) propuso en 1858, dice así:

"Supongamos una curva cerrada, convexa vista desde su exterior, es decir, sin concavidades exteriores ni puntos singulares, en la que se inscribe una cuerda AB. Un punto P de ésta divide la cuerda en dos segmentos PA = a y PB = b.

La cuerda se desplaza con sus extremos AB siempre apoyados en la curva de partida de manera que llegue a dar una vuelta completa en torno de ella. Así, el punto P dibujará otra curva cerrada interior a la primera (el lugar geométrico de P en la maniobra) de tal manera que entre las dos curvas se constituye una corona cuya área vale πab. Es decir, la misma área que tiene una elipse de semiejes a, b."

Veamos la forma más sencilla de probar un caso particular del teorema: cuando la curva de partida es una circunferencia (Fig. 1).

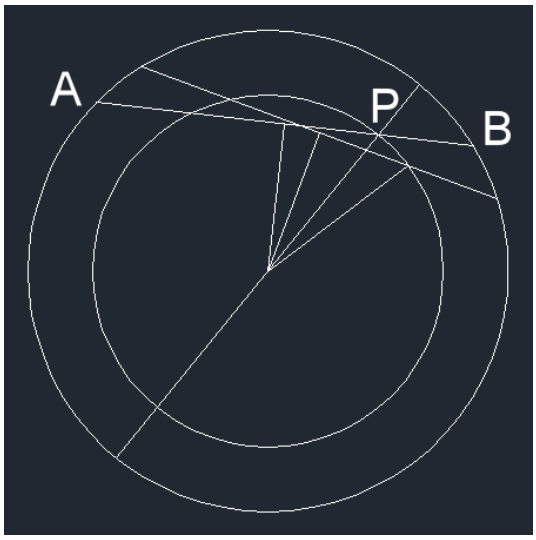


Fig. 1

En ella aparecen dos circunferencias: la grande de radio R que es la curva de partida conteniendo a la cuerda AB y la pequeña, de radio r que es el lugar geométrico de P.

La potencia de P respecto de la circunferencia grande se puede expresar como el producto ab o como el producto $(R - r)(R + r) = R^2 - r^2$.

Es decir $ab = R^2 - r^2$

Multiplicando ambos miembros por π, será:

$\pi ab = \pi (R^2 - r^2)$

Es decir πab es igual al área de la corona circular.

Obsérvese que en este caso particular para ir asentando AB sobre su circunferencia no ha hecho falta someter AB a ninguna traslación: ha bastado con girar el segmento.

Otra cosa a notar en la misma Fig. 1 es que la intersección de AB en una determinada situación, con la misma cuerda AB en la posición sucesiva tiende a situarse en el punto medio de AB cuanto menor sea el ángulo girado. Esto será muy importante a la hora de aplicar el cálculo integral en la demostración del teorema.

La Fig. 2 es muy parecida a la 1. Se ha despojado a ésta de lo que ahora resulta innecesario, se ha reducido mucho el valor de θ (el ángulo de giro de AB a su siguiente posición) precisamente para aparentar su tendencia a cero, y se ha añadido la circunferencia que pasa por el punto medio de AB y es concéntrica con las otras dos (la más pequeña de las tres).

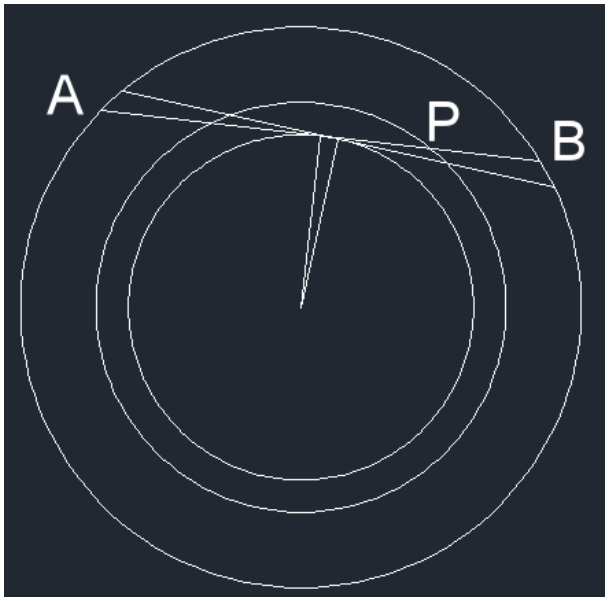


Fig. 2

Observemos los dos triángulos casi horizontales que tienen su vértice más agudo en el punto medio de AB: Cuando θ tiende a cero, son iguales y además isósceles (de acuerdo con el cálculo infinitesimal).

El triángulo de la izquierda (en el que A es un vértice) tiene un área igual a ½ de su base por su altura. La base es el lado pequeño de longitud "ángulo × radio", siendo el ángulo diferencial de θ, y el radio (a + b) / 2; este valor del radio es también el de la altura del triángulo (nos hemos situado en el terreno del cálculo infinitesimal).

El área de ese triángulo, integrada a toda la circunferencia resulta ser el área de la corona que determinan las circunferencias más grande y más pequeña.

Si llamamos [A] al área del círculo más grande y [Q] a la del más pequeño, será:

$$[A] - [Q] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 d\theta$$

Llamando [P] al área del círculo intermedio (ése cuya circunferencia es el lugar geométrico de P) y mirando al triángulo de la derecha (no el grande que tiene B como vértice, sino el más pequeño con vértice P), tendremos:

$$[P] - [Q] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 d\theta$$

Restando de la primera ecuación, la última, queda:

$$[A] - [P] = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi$$

Es decir, el área de la corona determinada por las circunferencias mayor e intermedia (la de partida y la del lugar geométrico de P) vale πab, como se quería demostrar.

La demostración, que resulta cómoda a partir de una circunferencia, es válida para cualquier otra curva de partida que reúna las condiciones del enunciado del teorema, puesto que el resultado no depende de la forma de la curva, sino solamente de a y de b.

El que el límite superior de la integral sea 2π no evoca a una circunferencia, sino al hecho de que por ser cerrada la curva de partida (que puede ser oblonga) ha de ser recorrida en una vuelta completa, de 2π radianes.

De todos modos, para comprobar lo que acabo de decir, me he entretenido en ver el resultado que ofrece una curva como la de la Fig. 3. La curva está hecha con una semielipse (de semiejes a´ y b´) y una semicircunferencia (de radio b´) a ella pegada. En la figura se ve la cuerda AB con su punto P que la divide en a y b.

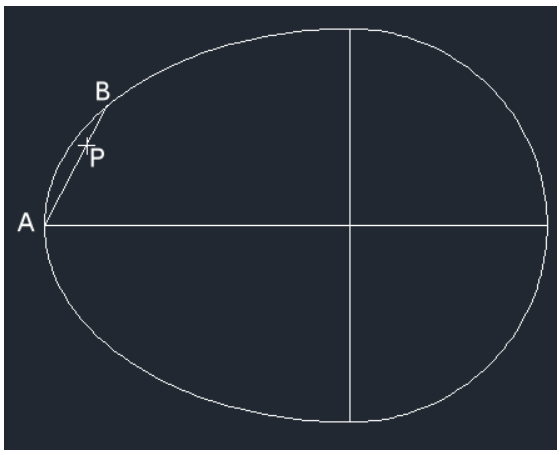


Fig. 3

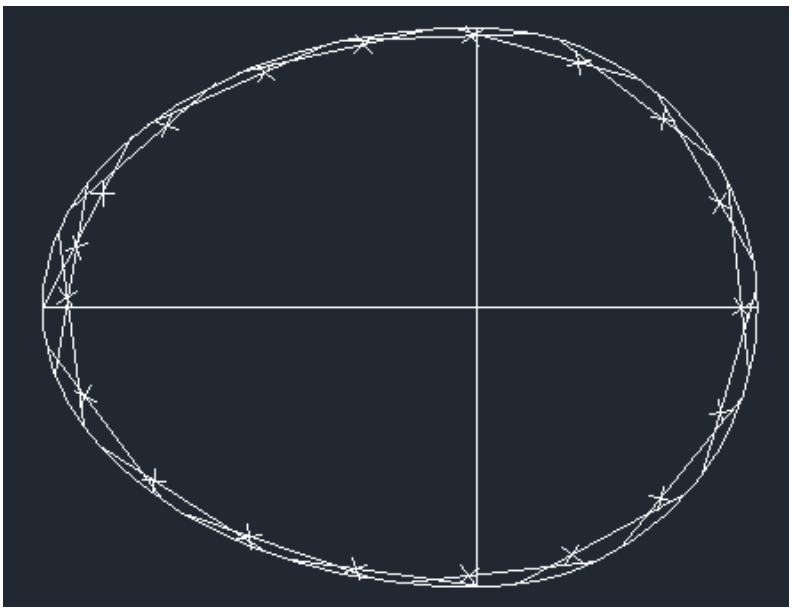


Fig. 4

La Fig. 4 representa la maniobra de llevar la cuerda con su punto P, apoyándose en la curva de partida hasta acabar una vuelta completa.

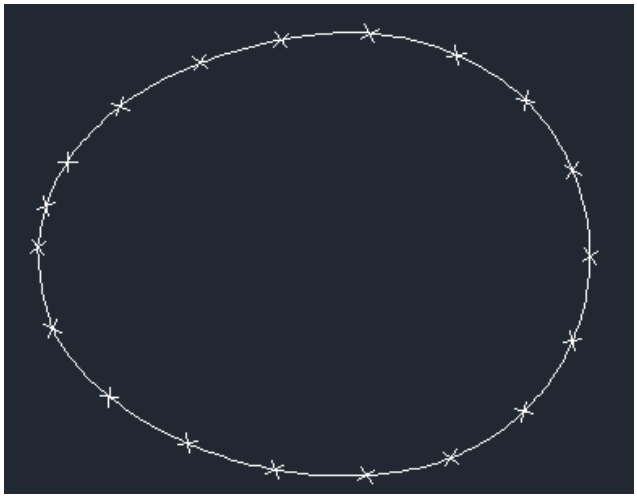


Fig. 5

En la Fig. 5 se han extraído todos los puntos P de la 4 para unirlos después con una curva *spline* de Autocad que permite, además, obtener el área encerrada en dicha curva que seguiremos llamando [P]. El resultado ha sido [P] = 7007,6584 u.p (unidades cuadradas de pantalla)

En el presente caso [A] = $(\pi a' b' + \pi b'^2)/ 2$ ha medido 7647,4547 u.p.

La diferencia 7647,4547 - 7007,6584 = 639,7963 u.p son las de la corona (la que queda entre la curva de partida y la del lugar geométrico de P). Como esta corona debe tener, según el teorema, una superficie de πab = 628,3185 u.p, resulta que hemos cometido un error en la medición de 1,8 %. El error viene de haber tomado sólo 19 puntos en vez de haber tomado infinitos.

Ya sólo falta demostrar que el área de una elipse es πab. Pensé hacerlo a partir de la ecuación polar de la elipse creyendo que sería más fácil, pero no ha sido así. Lo haré partiendo de la ecuación canónica, y con la ayuda de D. Pedro (Puig Adam). Llamaré A y B a los parámetros de la elipse para no confundirlos ni con los segmentos (en minúsculas) de la cuerda vistos antes, ni con los coeficientes de los polinomios que vamos a tener que manejar ahora. Así tendremos (Fig. 6):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

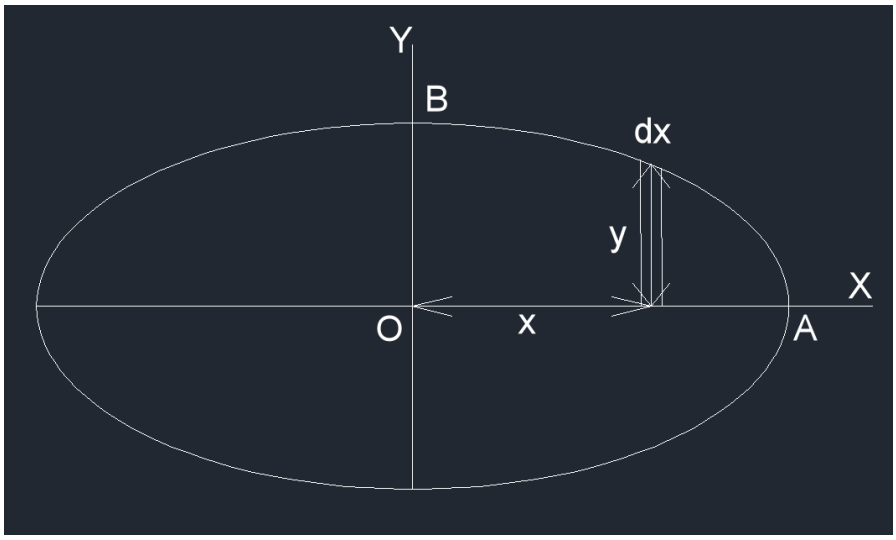


Fig. 6

$B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2$ $\qquad$ $A^2y^2 = A^2B^2 - B^2x^2$ $\qquad$ $y^2 = B^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 x^2$

$$y = \sqrt{B^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)} = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2}$$

La superficie S de la elipse completa valdrá

$$S = 4\int_0^A y dx = 4\frac{B}{A}\int_0^A \sqrt{A^2 - x^2}dx = 4\frac{B}{A}K$$

siendo $\qquad K = \int_0^A \sqrt{A^2 - x^2}dx = \int_0^A \sqrt{-x^2 + A^2}dx$

Multiplicando y dividiendo por el radical, tendremos:

$$K = \int_0^A \frac{-x^2 + A^2}{\sqrt{-x^2 + A^2}}dx \qquad (1)$$

Tengamos en cuenta que

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = (mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + c} + a_0\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

para los siguientes valores:

m = 1 / 2 n = b / 4a a_0 = (c / 2) – (b^2 / 8a)

resulta:

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{b}{4a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{8a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (2)$$

Comparando el polinomio que se repite en esta última igualdad con el que aparece en (1), tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2 + bx + c \\ \\ -x^2 \qquad + A^2 \end{array}\right\} \qquad a = -1 \qquad b = 0 \qquad c = A^2$$

Comparando ahora (1) y (2) podemos escribir:

$$K = \int_0^A \frac{-x^2+A^2}{\sqrt{-x^2+A^2}}dx = \left|\left(\frac{1}{2}x + 0\right)\sqrt{-x^2+A^2}\right|_0^A + \left(\frac{A^2}{2} - 0\right)\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{-x^2+A^2}}$$

$$K = \frac{A}{2}\times 0 - 0 + \frac{A^2}{2}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{-x^2+A^2}}$$

$$K = \frac{A^2}{2}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{-x^2+A^2}} \qquad (3)$$

Para resolver la última integral, hemos de comparar su radicando con el radicando que se contiene en (2). En éste, el coeficiente de x^2 es positivo mientras que el de la expresión de K es negativo. Haremos, pues, la siguiente transformación:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-a'x^2+bx+c}}$$

Multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro de esta igualdad por $\sqrt{a'}$, tendremos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-a'x^2+bx+c}} = \int \frac{\sqrt{a'}dx}{\sqrt{a'c+\frac{b^2}{4}-\left(a'x-\frac{b}{2}\right)^2}} \qquad (4)$$

igualdad que se evidencia cierta para a´ = 1 con resultado

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}}$$

Hagamos ahora

$$\alpha = \sqrt{a'c + \frac{b^2}{4}}$$

$$\xi = a'x - \frac{b}{2}$$

Diferenciando esta última igualdad, será: $d\xi = a'dx$

Sustituyamos en (4) estos valores de α y ξ, y multipliquemos numerador y denominador por $\sqrt{a'}$; tendremos:

$$\frac{1}{\sqrt{a'}}\int \frac{a'dx}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{a'}}\int \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{a'}} arcsen\frac{\xi}{\alpha} = arcsen\frac{\xi}{\alpha}$$

Recordando que

$b = 0$ $\quad$ $c = A^2$ $\quad$ $a' = 1$

Resulta que $\quad$ $\alpha = A$ $\quad$ $\xi = x$

Con lo que

$arcsen\frac{\xi}{\alpha} = \left|arcsen\left(\frac{x}{A}\right)\right|$ (límite inferior 0; límite superior A) = π / 2.

Es decir, la integral de (3) vale π / 2 y por consiguiente es

$$K = \frac{A^2}{2}\frac{\pi}{2}$$

Así pues, la superficie total de la elipse, S vale

$$S = 4\frac{B}{A}K = \frac{4BA^2\pi}{4A} = \pi AB$$

Hasta aquí, las complicaciones, pero llega mi amigo Mariano Nieto que es capaz de simplificar hasta el Laberinto de Creta, y me facilita la cosa apoyándose en la ecuación paramétrica de la elipse, cosa que a mí no se me había escurrido (como diría mi hija Virginia). Lo fácil que es se muestra en la elipse de la Fig. 7.

Su ecuación paramétrica (el parámetro es el ángulo t), es:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\,sen\,t \end{array}\right\}$$

Basta recordar que $sen^2 t + cos^2 t = 1$ para llegar a la ecuación canónica; ello se evidencia en dicha Fig 7 al ver los triángulos OCD y el que tiene en O el vértice de su ángulo en t; como consecuencia la horizontal PD pasará por C.

Si recordamos la Fig. 6 veremos que el área total e la elipse es:

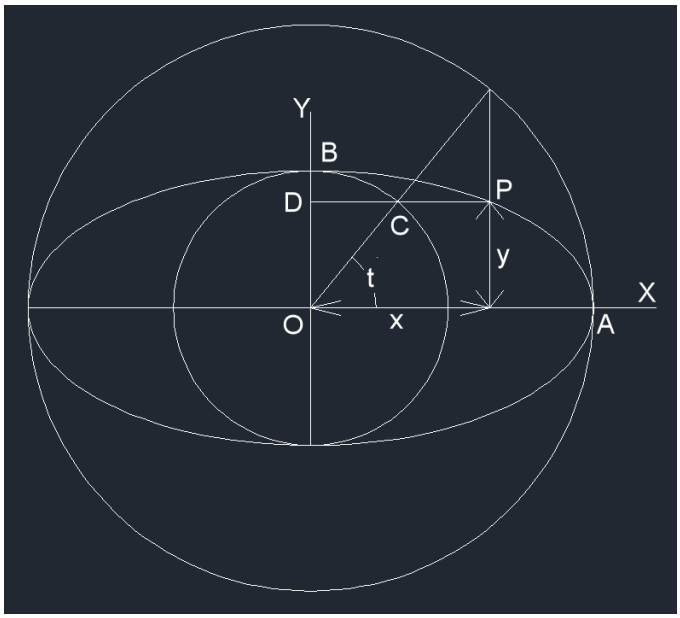


Fig. 7

$$S = 4\int_0^a y dx$$

De la ecuación paramétrica se deduce que

y = b sen t
dx = -a sen t dt
para x = 0, t = arc cos (0) = π / 2
para x = a, t = arc cos (1) = 0

luego tendremos:

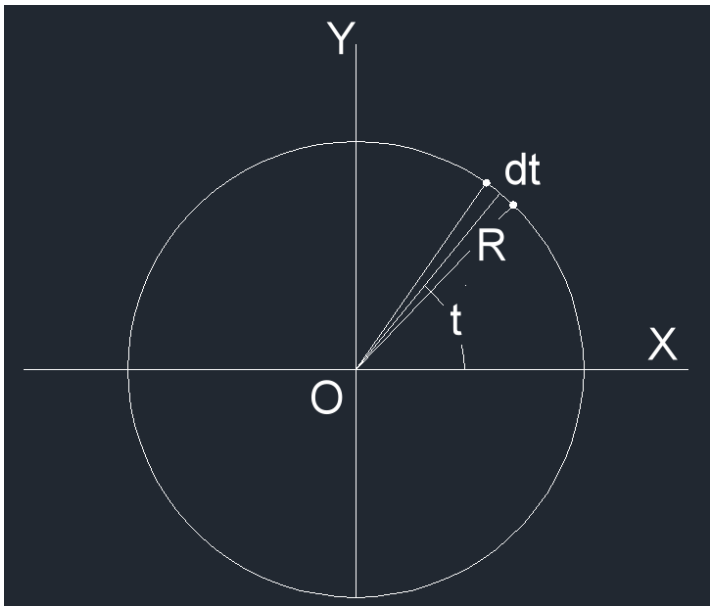
$$S = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sent \times sentdt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sen^2 t\, dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1 - cos2t}{2} dt$$

$$= -2ab\left[\int_{\pi/2}^{0} dt - \int_{\pi/2}^{0} cos2tdt\right]$$

Hagamos el cambio de variable
2t = u cos2t = cosu dt = 1 / 2 du
para t = π / 2 u = π
para t = 0 u = 0

$$S = -2ab\left[\int_{\pi}^{0} \frac{1}{2} du - \int_{\pi}^{0} cosu \times \frac{1}{2} du\right] = -ab[(0 - \pi) - (sen0 - sen\pi)] = \pi ab$$

Y, por simplicidad, no puede faltar el área del círculo según la Fig. 8.



$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}R^2 dt = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2R^2\frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

Fig. 8