ProbCubo

Dado un cubo pequeño hacer en él un agujero de sección cuadrada que lo atraviese de manera que otro cubo más grande pueda entrar por dicho agujero.

Traduzco el difuso enunciado que da Martin Gardner, sin aportar la solución, en su libro *More Mathematical Puzzles and Diversions*:

"En cuanto al cubo mencionaré el hecho sorprendente de que un cubo puede pasar por un agujero hecho en otro cubo más pequeño. Si mantienes un cubo de forma que apuntes con la vista a uno de sus vértices podrás ver un hexágono formado por las seis aristas exteriores del cubo. Con ello en seguida podrás apreciar que hay espacio suficiente para producir un agujero de sección cuadrada. Esta sección cuadrada puede ser ligeramente mayor que la cara del cubo de partida".

SOLUCIÓN

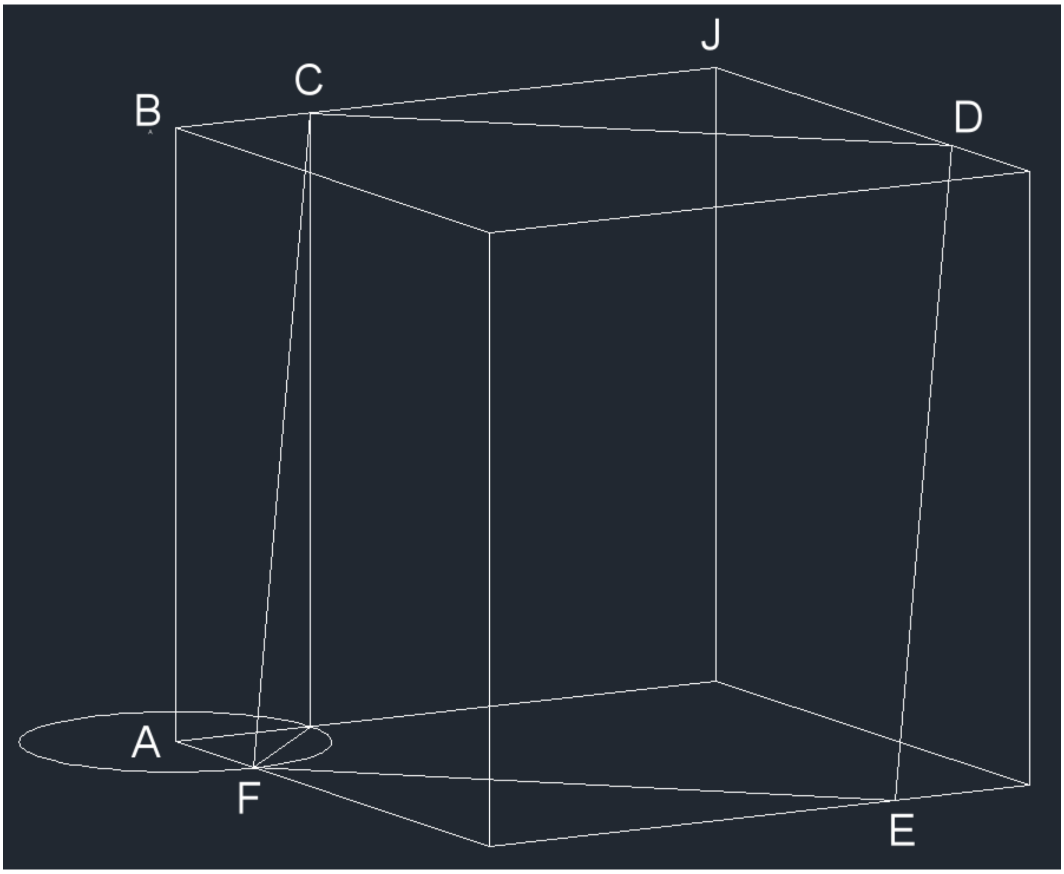

Fig. 1

La Fig. 1 recoge lo enunciado, pero observando que el tal hexágono (irregular, según la perspectiva mostrada) es un polígono ficticio ya que sus lados se ven asentados como tales sólo en el plano del dibujo; en el espacio real, naturalmente, no son coplanarios.

El cubo de partida (el pequeño que llamaremos Cubo l) es el de arista AB y el cuadrado más grande que puede caber dentro de él es el CDEF. Si ello es así, tendremos:

l = AB = BJ (arista del Cubo l, conocida)
a = AF (radio del círculo mostrado)

$L^2 = l^2 + 2\,a^2$ (incógnitas: a; L. L es la arista del cubo grande que llamaremos Cubo L)
L = FC = CD = DE = EF

Que permite escribir:

$L^2 = 2\,(l - a)^2$ (triángulo CDJ)

$l^2 + 2\,a^2 = 2\,(l - a)^2$

$a = l / 4$

$L^2 = 2\,(l - l / 4)^2$

$L^2 = 2\,l^2\,(3 / 4)^2 = l^2\,(9 / 8)$

$L = l\,\sqrt{(9 / 8)} = 1{,}061\,l$

Así resulta que el cuadrado CDEF es la sección normal del paralelepípedo que tiene que tunelar a Cubo l. Interesa, pues, obtener el eje de ese paralelepípedo. Será la perpendicular al cuadrado CDEF por su centro que es, a su vez, el centro O de ambos cubos, l y L (Fig.2). El eje de ese paralelepípedo - túnel resulta ser HJ.

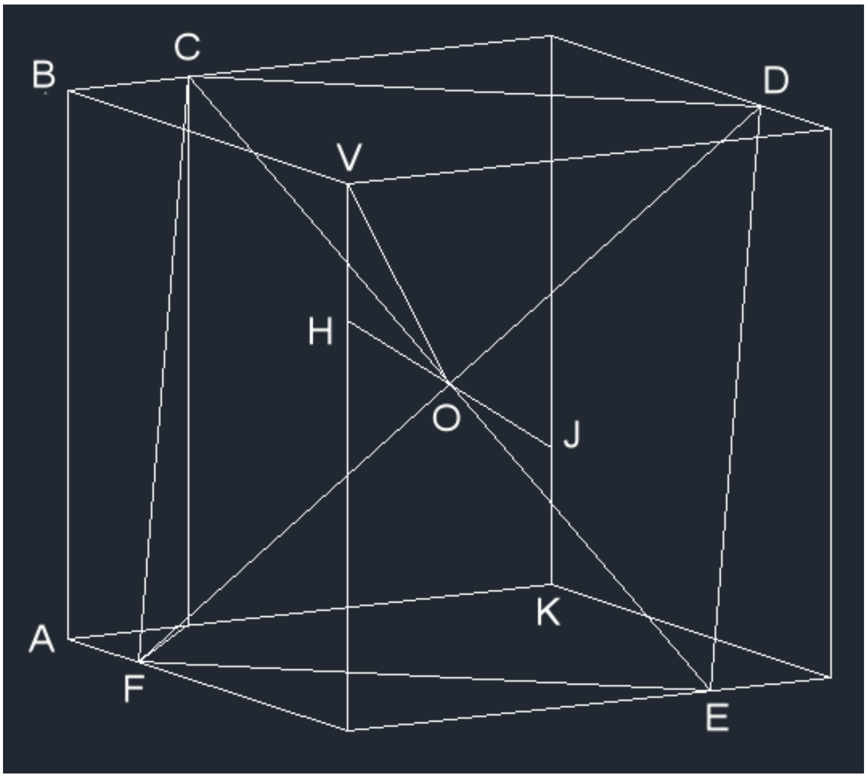

Fig. 2

Antes apuntaba M. Gardener "el hecho sorprendente …". Pues vean si no es sorprendente el hecho de que esa perpendicular HJ al cuadrado CDEF por su centro O, corte respectivamente a las aristas verticales por V y K de forma que sea VH = KJ = a.

El triángulo VHO de la Fig. 2, se ve en su verdadera magnitud en la Fig. 3 donde se puede apreciar que
VH = a
HO = l - a
VO = Radio del Cubo l

En la Fig. 4 se ve cómo el túnel, con su eje en rojo, se introduce en el Cubo l.

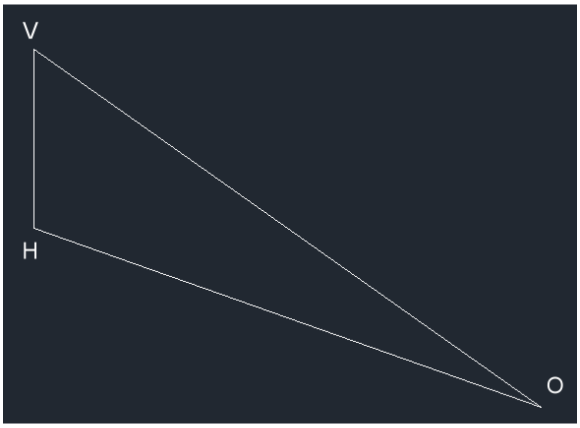

Fig. 3

En la Fig. 4 se evidencia que el experimento se ha hecho para Cubo L que es el mayor posible, pero se puede realizar para cualquier otro cubo cuya arista esté comprendida entre l y 1,061 l = L.

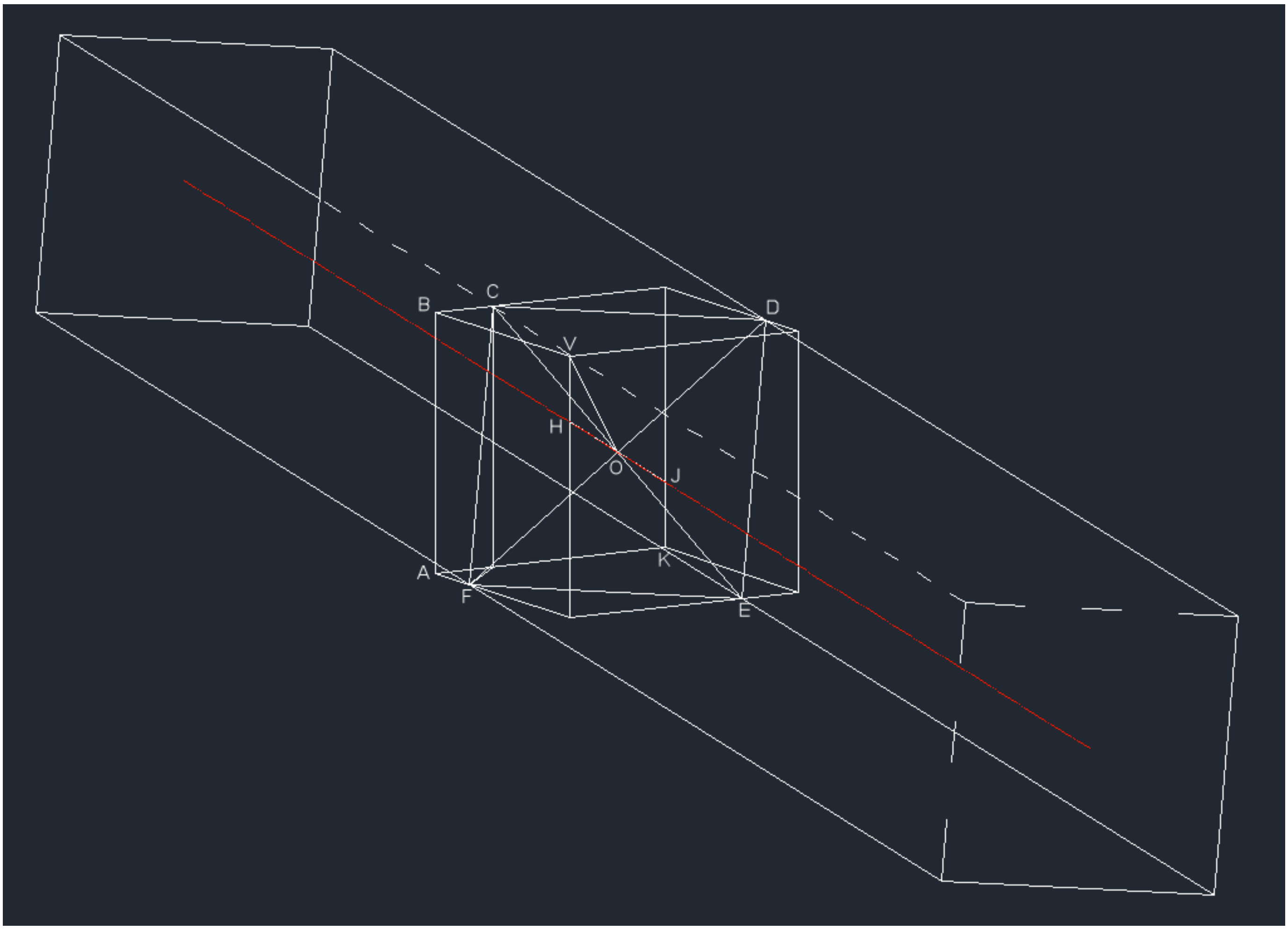

Fig. 4

Añadiré, por último, un sencillo efecto secundario que he hallado en medio de tanto sorprendimiento. En la Fig. 5 se ve que seccionando un cubo según las líneas rojas, se obtiene un rombo cuyas diagonales son, respectivamente, la diagonal del cubo y la de una cara. Ésta última tiene sus extremos en los puntos medios de las aristas verticales correspondientes.

Fig. 5