ProbCuatri

El problema consiste en obtener cuatro figuras (tres cuadriláteros y un triángulo) tales que adosadas todas ellas unas con otras sin dejar hueco entre sí, puedan dar lugar, indistintamente, a la formación de un cuadrado o de un triángulo equilátero.

Este problema conocido como “el acertijo del mercero” fue propuesto y resuelto en 1902 por el matemático inglés Dudeney. Lo de mercero no es la traducción adecuada para el título porque la palabra mercero (en inglés haberdasher) tiene dos acepciones: sastre y alguien que negocia con menudencias tales como las de nuestro mercero. Esta última no tienen nada que ver con el contexto del acertijo que se refiere a telas. Por tanto, el título debería ser “el acertijo del sastre”

SOLUCIÓN 1

La que da Dudeney es la de la Fig. 1 en la que yo he incorporado todas las líneas auxiliares necesarias para evitar los detalles verbales del proceso. En ella he destacado en rojo el triángulo equilátero y en verde el cuadrado, ambos de igual área.

Como dimensiones UDP (unidades de pantalla del ordenador; Aplicación Autocad en este caso), he tomado para esta solución y la siguiente

t (lado del triángulo): 600.
c (lado del cuadrado): 394,8

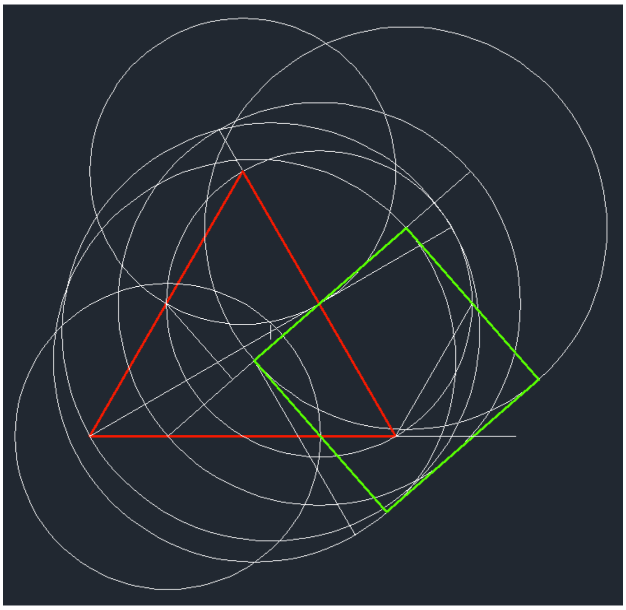

Fig. 1

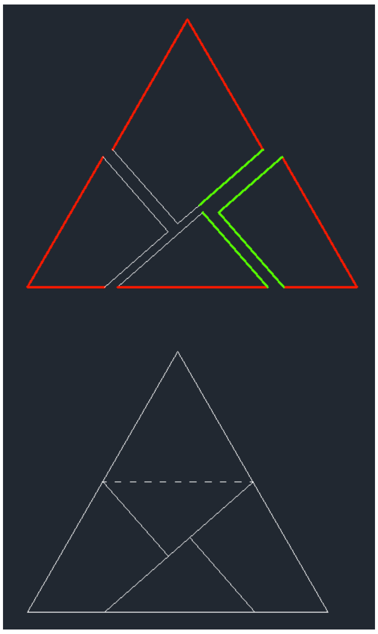

Fig. 2

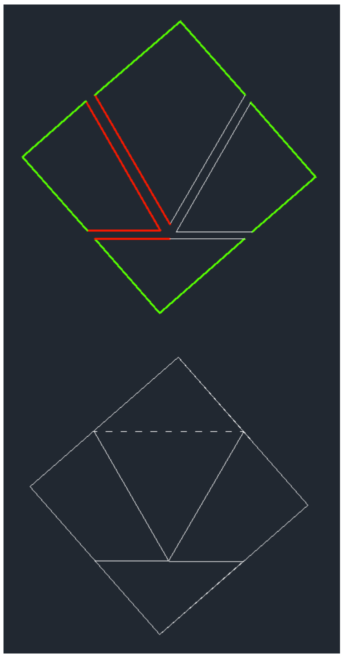

Fig. 3

De la jungla de la Fig. 1 he extraído las cuatro piezas necesarias para formar el triángulo, con sus propios colores, y las he trasladado a la Fig. 2. Otro tanto he hecho con el cuadrado para la Fig. 3.

Los segmentos en línea discontinua no son aquí necesarios. Los he añadido sólo como referencia a la SOLUCIÓN 2.

SOLUCIÓN 2

Ésta es mi aportación. Quiero adelantar una observación. El CAD no se limita a dibujar, sino que para ello tiene que hacer todos los cálculos necesarios, así que evita hacerlos al usuario, a la vez que hace de fedatario de los resultados.

Lo primero que se deduce del enunciado es que hay que buscar la relación que existe entre un cuadrado y un triángulo equilátero que tengan igual área, es decir hay que encontrar la relación entre sus lados c (del cuadrado) y t (del triángulo).

La altura de un triángulo equilátero se calcula fácilmente como $h = t (\sqrt{3}) / 2$
Y su área vale $A_T = ½\, t \times h = t^2 (\sqrt{3}) / 4$.

Por otra parte, el área de un cuadrado es $A_C = c^2$.

Igualando las dos áreas se tiene: $t^2 (\sqrt{3}) / 4 = c^2$

$$c = t\,[\sqrt{(\sqrt{3})}] / 2 = kt.$$

En nuestro caso, será:
$c = 394,8$
$t = 600$
$k = c/t = 0,658$

La relación entre los lados t y c ahora calculada se puede plantear asimismo de manera puramente geométrica como se ve en la Fig. 4. En ella se igualan las áreas c^2 del cuadrado y la del triángulo de lado t que equivale a la del rectángulo de lados h y t / 2.

Así se tiene que $c^2 = ½\, t \times h$. Es decir, que c es la media proporcional entre h y ½ t. Como tal es obtenida c en dicha Fig. 4.

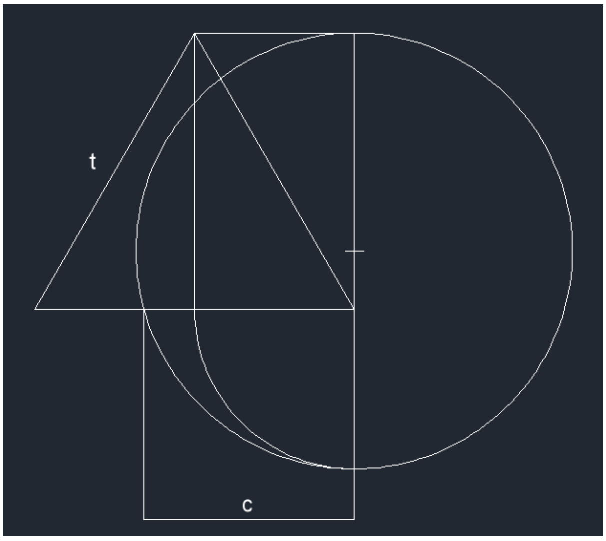

Fig. 4

Así ya podemos dibujar el triángulo equilátero de lado t (a la izquierda de la Fig. 5) y el cuadrado de área equivalente y lado c (a su derecha). A la derecha de dicha Fig. 5 se ha repetido el gran triángulo añadiendo el triángulo equilátero de lado t / 2 que será de utilidad en lo sucesivo.

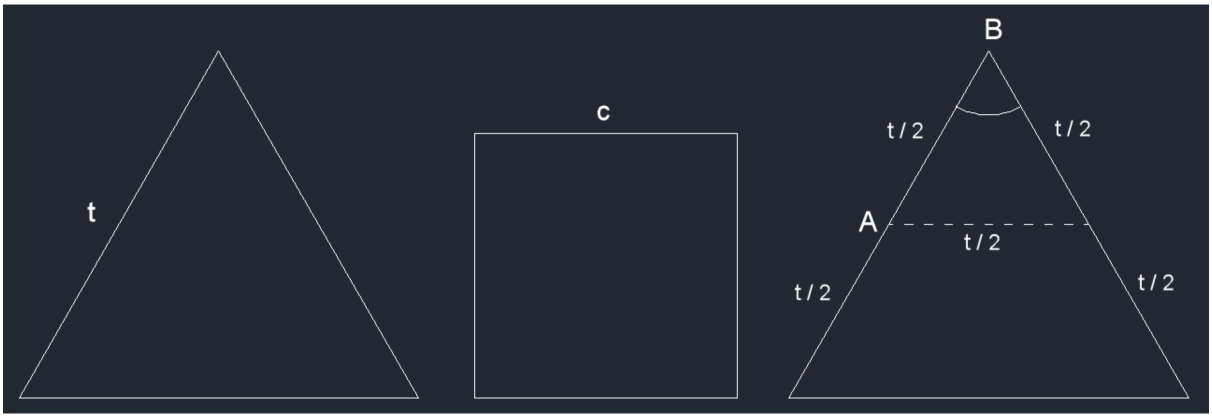

Fig. 5

Con la Fig. 6 empieza la maniobra llevando el pequeño triángulo equilátero de la Fig. 5 sobre el cuadrado de forma que su vértice inferior derecho caiga sobre el punto medio del lado inferior del cuadrado.

Luego (a la derecha de Fig.6), se gira en sentido horario ese triángulo equilátero en torno de dicho punto medio hasta que A se asiente sobre el lado izquierdo del cuadrado. Después se traza una semirrecta desde el punto medio del lado superior del cuadrado que, pasando por B desborde el cuadrado y produzca el punto C.

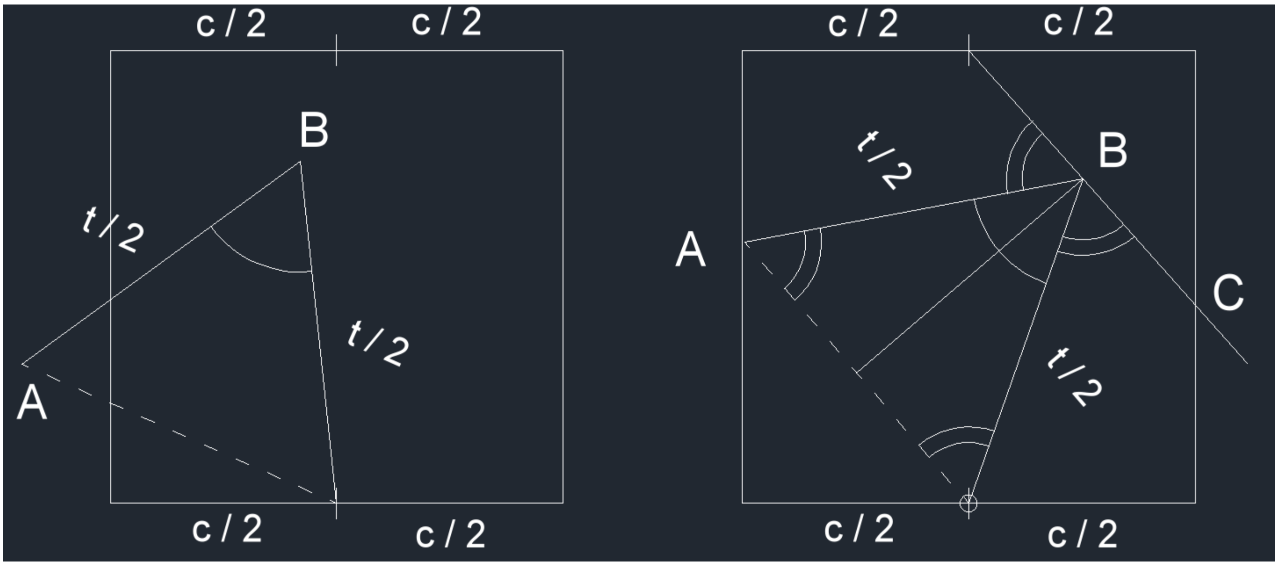

Fig. 6

Fig. 7 es la misma Fig. 6 en la que B se obtiene como intersección del arco AB y la altura del triángulo ABD. Además, se ha prolongado CBE hasta obtener F, con esta consecuencia: Aparecen los tres triángulos rectángulos AOD, FGE y EHC que resultan ser congruentes. Ello quiere decir que las hipotenusas AD y EC son paralelas ya que tienen el mismo coeficiente angular, lo cual confirma la igualdad a 60^{0} de los ángulos marcados en la Fig. 6.

Evidentemente y, por construcción, los puntos F, E, B, C están alineados. Así pues, las cuatro figuras (en blanco grueso) tienen las medidas siguientes.

Triángulo rectángulo EHC:
EC = t / 2 = 300
EH = c / 2 = 197,4
HC = AO = $\sqrt{[(t / 2)^2 - (c / 2)^2]}$ = 225,9

Cuadrilátero OABD
AB = BD = t / 2 = 300
OD = c / 2 = 197,4
OA = HC = 225,9

Cuadrilátero AGEB:
AG = c – OA = 168,9
GE = c / 2 = 197,4
EB = 147,3
EB se obtiene en el triángulo DEB del que se conocen los lados ED = c; DB = t / 2; el ángulo en B = 120 grados y el ángulo en E = 90 - Arc Tg (HC / EH).

Cuadrilátero BCJD:
BC = EC – EB = 152,6
CJ = AG = 168,9
JD = c / 2 = 197,4
DB = t / 2 = 300

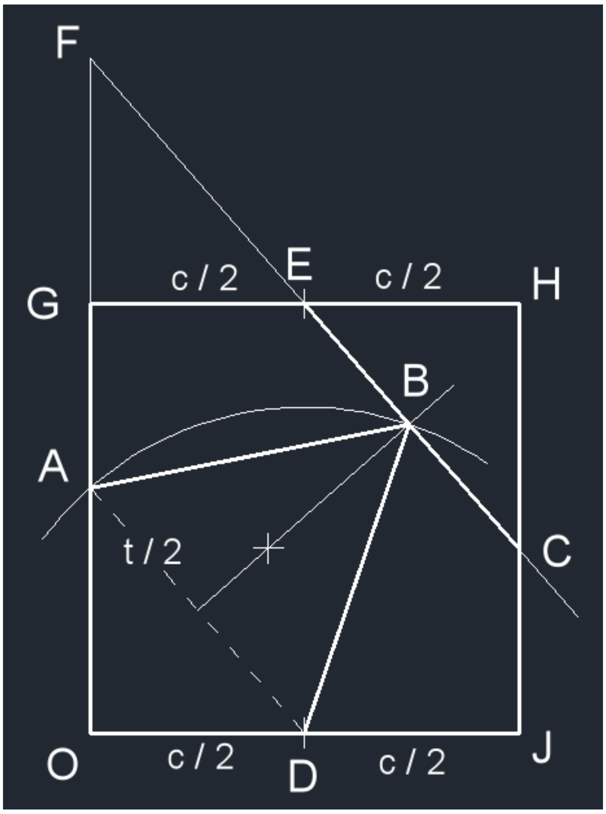

Fig. 7

Nótese que los tres cuadriláteros tienen un ángulo de 90 ^{0} y su opuesto, de 60. Estos tres ángulos rectos y el del triángulo rectángulo son los cuatro del cuadrado de lado c. Se ve también que B no es el punto medio de EC (por muy poco).

Veamos ahora cómo se puede pasar del cuadrado de la Fig. 7 al triángulo equilátero de lado t.

A la izquierda de la Fig. 8 se inicia la rotación horaria alrededor de C del conjunto de las dos figuras superiores. A la derecha de esa Fig. 8, se consuma el giro a tope.

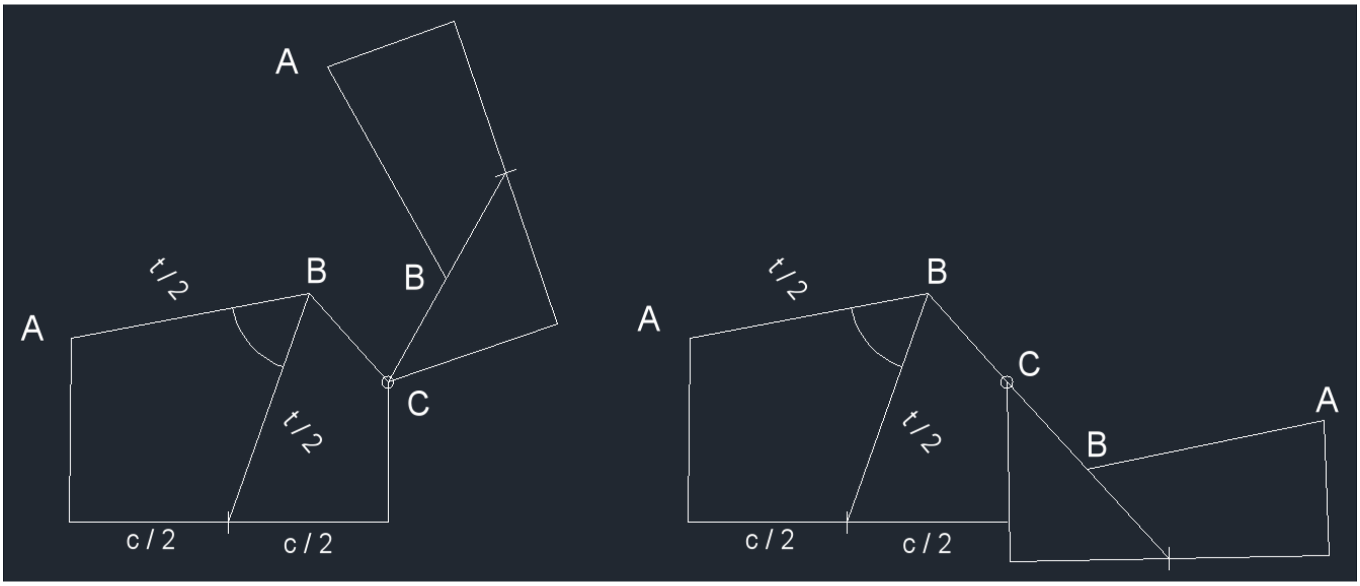

Fig. 8

A la izquierda de la Fig. 9 se inicia la rotación horaria del cuadrilátero que está a la derecha del todo. En la imagen de la derecha se consuma el giro a tope.

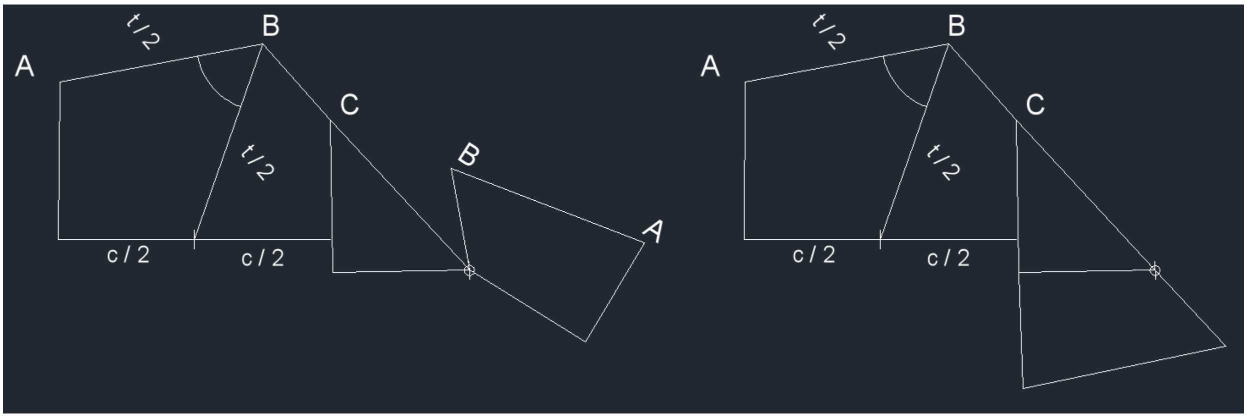

Fig. 9

A la izquierda de la Fig. 10 se inicia la rotación antihoraria del cuadrilátero destacado con su ángulo de 60 ^{0} y, a la derecha se consuma el giro a tope. Ahí se llega al fin del proceso mostrando los 4 ángulos rectos del cuadrado de partida recogidos hacia el centro del gran triángulo equilátero.

Notar que a la derecha de la Fig. 10 la hipotenusa del triángulo rectángulo no está centrada en el lado del triángulo equilátero en que se asienta porque los lados menores de sus cuadriláteros adyacentes (EB y BC de la Fig. 7) no son iguales: B no es el centro de EC.

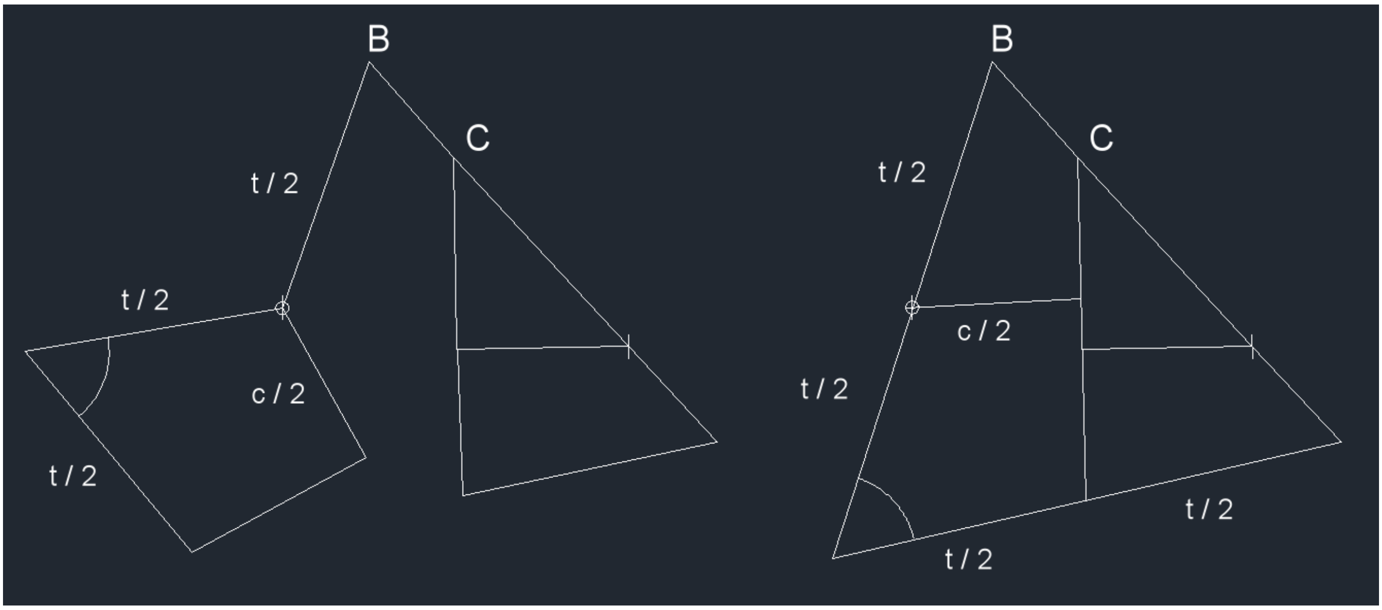

Fig. 10

…×o0o×…

DE PROPINA

Conocidos los valores 30 y 16,4 de la Fig. 11, obtener el radio R de la circunferencia.

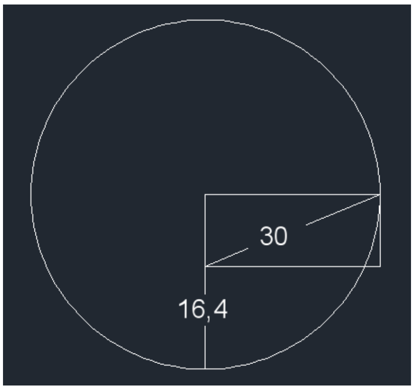

Fig. 11

SOLUCIÓN

$R^2 = 30^2 - (R - 16{,}4)^2$

$R^2 = 30^2 - (R^2 - 32{,}8\ R + 16{,}4^2\ )$

$2\ R^2 - 32{,}8\ R - 631{,}04 = 0$

$R = 27{,}7$

…×o0o×…

Como me parece que algún niño no estuvo en clase la última vez, vamos a repetir. Conocidos los valores 30 y 17,8 de la Fig. 12, obtener el radio R de la circunferencia.

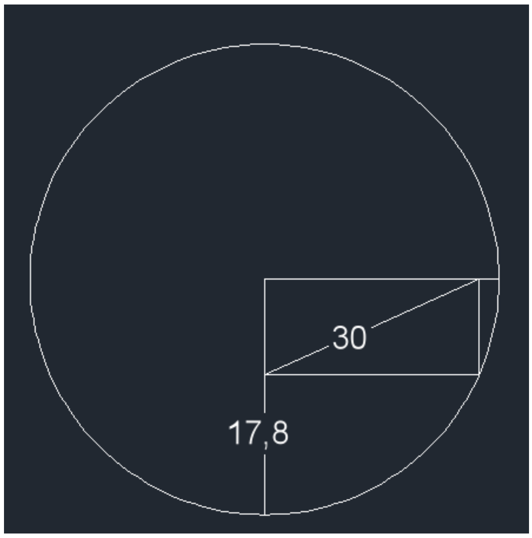

Fig. 12

SOLUCIÓN

R = 30 porque las dos diagonales del rectángulo miden lo mismo.

…×o0o×…