ProbAmarillo

En el rectángulo ABCD están inscritos tres triángulos equiláteros (de lado l = 1) coloreados según la Fig. 1 en amarillo y rojo. Se pide averiguar si el área amarilla es igual que la roja, o no. En caso de que sean diferentes, decir cual es la mayor.

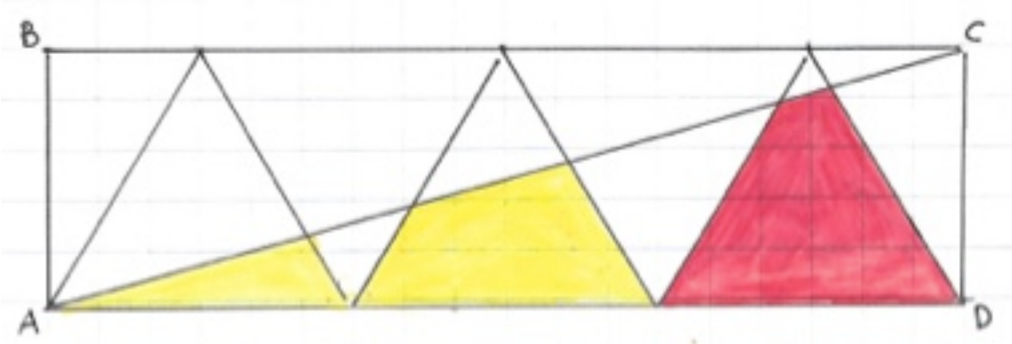

Fig. 1

SOLUCIÓN

En la Fig. 2 se han trazado las dos paralelas a la diagonal AC que determinan los tres triángulos iguales S, los dos trapecios iguales T, y el R. Se verifica que

Amarillo = 2S + T
Rojo = S + T + R
Amarillo – Rojo = S - R

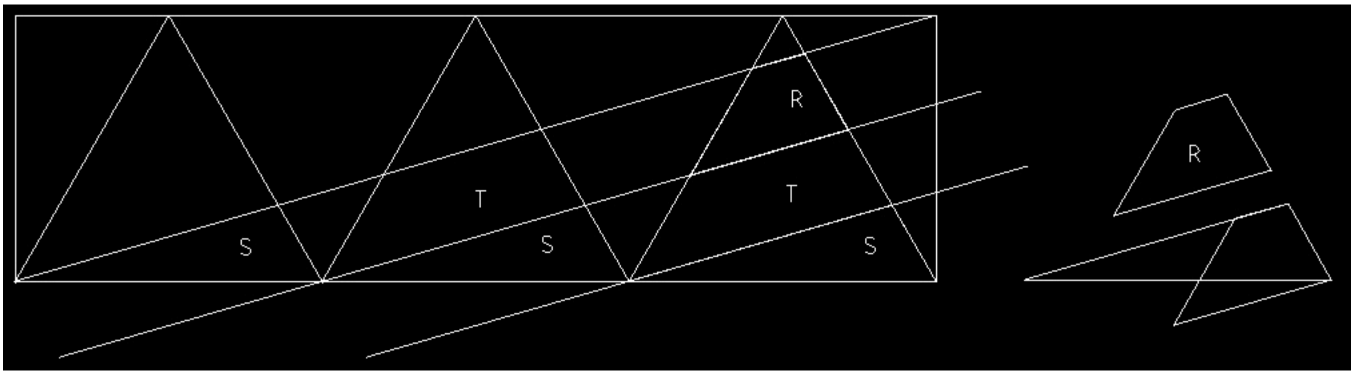

Fig. 2

Para comparar las dos áreas coloreadas basta comparar las de S y R que son las que determinarán la posible diferencia. A la derecha de dicha Fig. 2 se han separado ambas y luego se han superpuesto. En la superposición se ve que la diferencia de áreas amarilla y roja es la misma que se aprecia entre los dos triángulos obtusángulos semejantes. Allí se ve que el superior (parte de lo amarillo) es mayor que el inferior (parte de lo rojo R). Así pues, el área amarilla es mayor que la roja.

Vamos a cuantificar la diferencia con la Fig.3, en varios pasos.

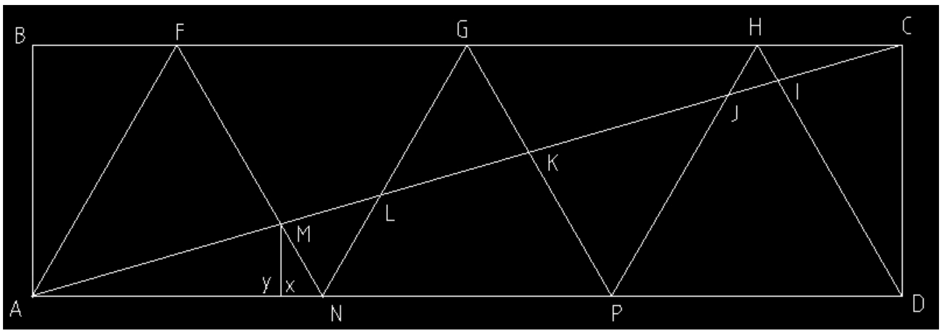

Fig. 3

1.- Hallar el área del triángulo AMN

De él conocemos sus ángulos A y N, y el lado AN = l = 1
Ang. A = arc tg ((√3 / 2) /3) = 16,10º
Ang. N = 60º
Será

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y \operatorname{tg} A = x \operatorname{tg} N \end{array}\right\}$$

(1 – x) tg A = x tg N

x = tg A / (tg N + tg 16,10) = 0,1428

Área de AMN = (AN * x tg N) / 2 = 0,1428 * 1,732 / 2 = 0,1237

2.- Hallar el área del triángulo AFM

AFM = AFN – AMN = (√3 / 4) - 0,1237 = 0,3093

3.- Los triángulos AFM, LGK y JHI son semejantes (CB y CA cortan a las paralelas que forman, respectivamente, los lados elevados de los tres triángulos equiláteros). Veamos cual es su razón de semejanza.

FA / GL = FC / GC = 5 / 3 = 1,6666 (la medida se ha hecho con la mitad de un lado como unidad)
La relación de las áreas será
$S_{AFM} / S_{LGK} = 1,6666^2 = 2,7777$

Área GLK = 0,3093 / 2,7777 = 0,1113

FA / HJ = FC / HC = 5 / 1 = 5
La relación de las áreas será
$S_{AFM} / S_{JHI} = 5^2 = 25$

Área JHI = 0,3093 /25 = 0,0124

4.- Área amarilla = Áreas (AMN + AFN - GLK) = 0,1237 + √3 / 4 - 0,1113 = 0,4454
Área roja = AFN – HJI = √3 / 4 – 0, 0124 = 0, 4206

Área amarilla / área roja = 0,4454 / 0, 4206 = 1,05896

Área amarilla – Área roja = AMN – GLK + HJI = 0,1237 -0,1113 + 0,0124 = 0,0248 unidades cuadradas.

Las áreas están medidas en unidades cuadradas siendo 1 la unidad lineal, igual al lado del triángulo equilátero (AN).