CAPRICHOS ingenieros
Jesús de la Peña Hernández

PIRÁMIDE

Por uno de mis caprichos necesito saber qué ángulo forman dos caras adyacentes de una pirámide regular. Como las apariencias engañan, resulta que la cosa no es tan sencilla como parece. Por eso, veremos primero un ejemplo fácil, y particular.

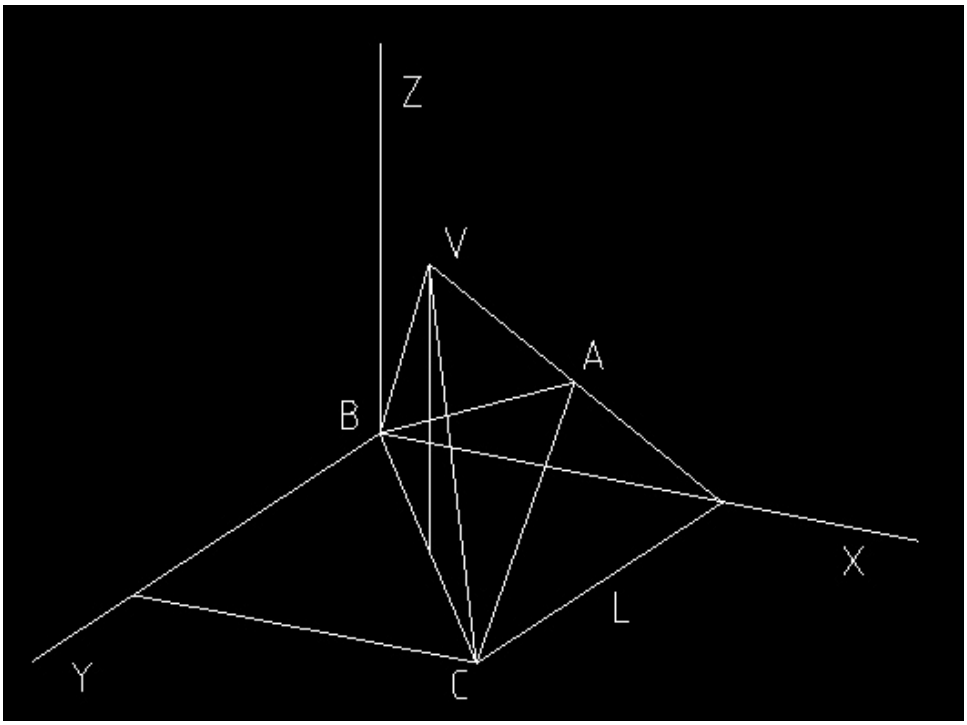

Fig. 1

La Fig. 1 representa, parcialmente, una pirámide cuadrangular. BC es una de las diagonales de su base y L es el lado de ésta; V es el vértice.

Las caras laterales (se ven sólo las dos adyacentes que tienen el punto A común), son triángulos equiláteros.

Para hallar el ángulo que forman estas dos caras laterales hay que trazar un plano perpendicular a su arista común (la que contiene al punto A) para ver después cuales son sus trazas en las dos dichas caras laterales.

Como se ve, el plano del triángulo ABC es el plano perpendicular buscado: viene determinado por dos rectas perpendiculares concurrentes en A, las BA y CA. Aunque no se dijo antes, ahora es ocasión de añadir que A es el punto medio de la arista común.

BA es perpendicular a la arista común porque es la altura de una de las dos caras laterales triángulo equiláteras.

Al segmento CA le pasa lo mismo respecto de la otra cara lateral.

Así pues, ya podemos construir el triángulo ABC porque conocemos sus tres lados en función de L. Será:

BC = L $\sqrt{2}$

AC = AB= altura de un triángulo equilátero = L $\sqrt{3}$ / 2.

La Fig. 2 muestra al triángulo ABC sobre la base cuadrada de la pirámide. En ella se ve que el ángulo A medirá:

A = 2 Arc sen (L $\sqrt{2}$ / 2 : L $\sqrt{3}$ / 2) = 2 Arc sen ($\sqrt{2}$ / $\sqrt{3}$) =

=109,4712º

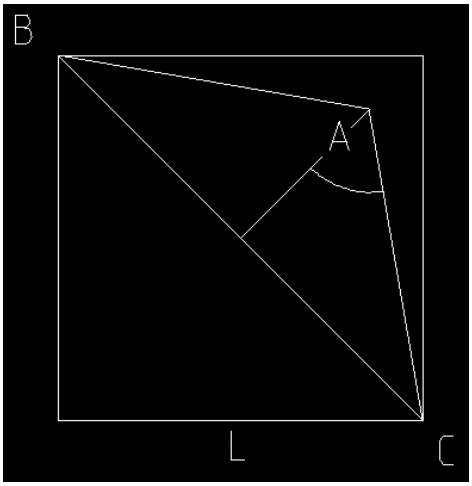

Fig. 2

Visto el caso sencillo, pasemos a la solución general de la Fig. 3 en la que se apunta un cono asentado sobre el origen de coordenadas O y del cual conocemos el radio de su base R = OA y su altura H = OV.

En él está inscrita una pirámide regular de n caras; se ven dos de ellas, adyacentes con VA como arista común.

Con los datos anteriores, vamos a averiguar el valor del diedro de arista VA. Para ello definiremos los dos planos de ambas caras por tres de sus puntos: Los V, A, B, C.

Punto V: (0; 0; H)

Punto A: (R; 0; 0)

Punto B: Ver la Fig. 4 que es la planta de la 3; en ella se muestra que α = 360 / n. Por tanto será
B ≡ (R cos α; - R sen α; 0).

Punto C: (R cos α; R sen α; 0).

Ecuación del plano VAB:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & H & 1 \\ R & 0 & 0 & 1 \\ R\cos\alpha & -R\,\text{sen}\,\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

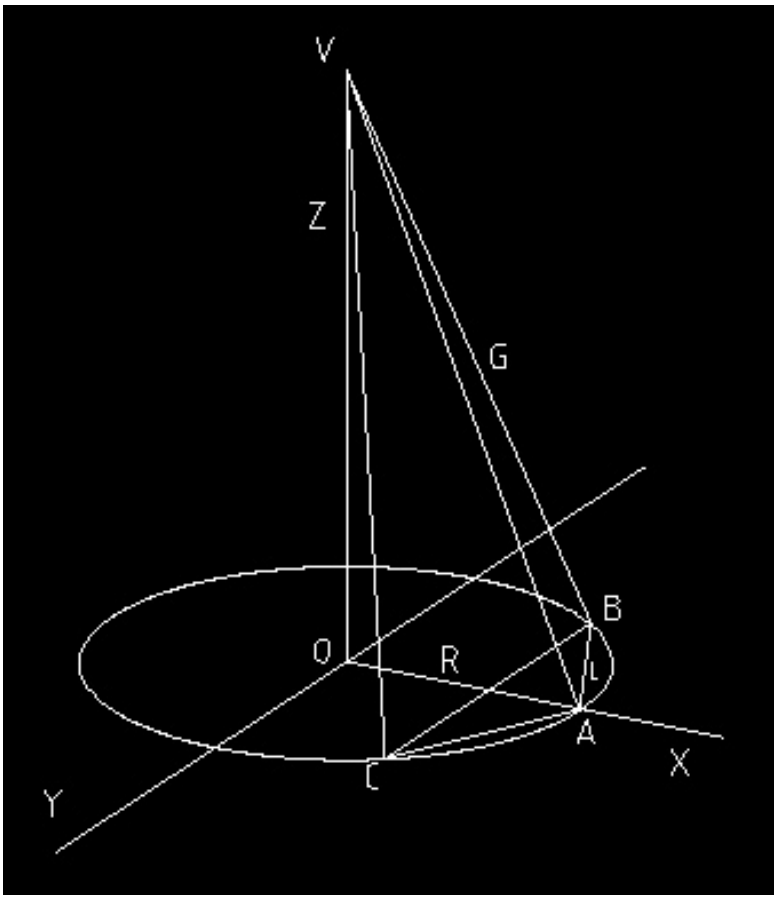

Fig. 3

- H sen α x + H(1 - cos α) y - R sen α z + R H sen α = 0

Para el plano VAB ≡ A x + B y + C z + D = 0, será:

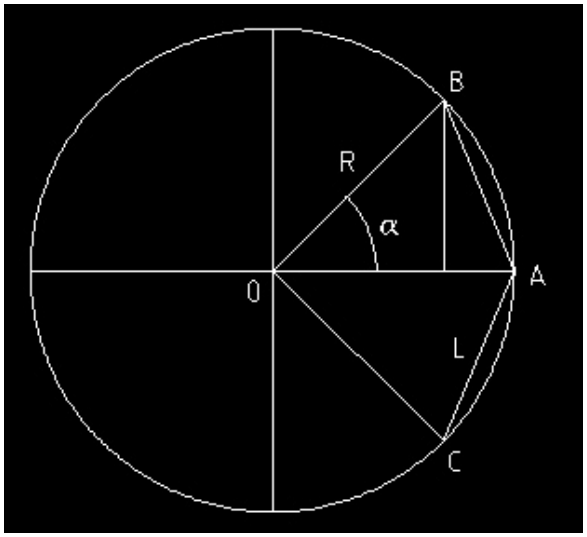

Fig. 4

A = - H sen α
B = H (1 - cos α)
C = - R sen α
D = R H sen α

Ecuación del plano VAC:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & H & 1 \\ R & 0 & 0 & 1 \\ R\cos\alpha & R\,\text{sen}\,\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

H sen α x + H(1 - cos α) y + R sen α z - R H sen α = 0

Para el plano VAC ≡ A1 x + B1 y + C1 z + D1 = 0, será:

A1 = H sen α
B1 = H(1 - cos α)
C1 = R sen α
D1 = - R H sen α

El ángulo γ que forman los planos VAB y VAC de las dos caras de la pirámide, viene dado por:

$$tang\ \gamma = \frac{\sqrt{(A\,B1 - B\,A1)^2 + (B\,C1 - B1\,C)^2 + (C\,A1 - C1\,A)^2}}{A\,A1 + B\,B1 + C\,C1}$$

γ puede hallarse puesto que R, H y α son conocidos.

Comprobemos que esta solución es aplicable al caso de la pirámide cuadrangular que vimos al principio. Allí teníamos :

L = 100
H = R = L √2 / 2 = 70,7107
α = 90
sen α = 1
cos α = 0

Sustituyendo valores en las fórmulas que dan los coeficientes de los dos planos, tenemos:

A = - 70,7107
B = 70,7107
C = - 70,7107

A 1= 70,7107
B 1= 70,7107
C 1= 70,7107

Llevando estos valores a la fórmula que da $tang\ \gamma$ se tiene:

$tang\ \gamma$ = - 2 √2

En la Fig. 5 se ve cómo se llega al valor de 109,4712º obtenido al principio. Representa una circunferencia con centro O en el origen de coordenadas y radio R igual a la unidad. Será:

AB = - 2 √2

Uniendo B con O hasta C se obtiene el ángulo AOC = 109,4712º.

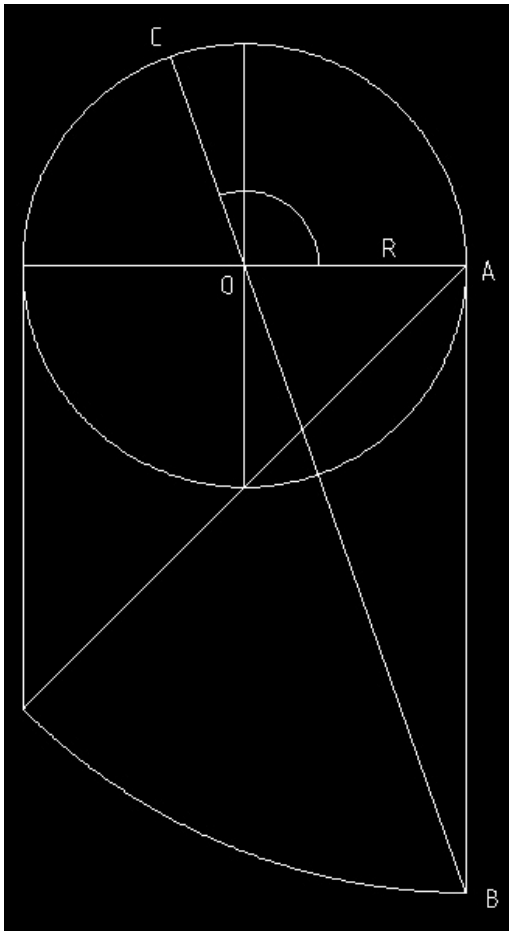

Fig. 5

Veamos por fin el caso de una pirámide octogonal. Nos servirá la Fig. 3 en la que ahora tendremos:

H = 65
R = 20
α = 45
sen α = 1 / √2 = 0,7071
cos α = 1 / √2 = 0,7071

Sustituyendo valores en las fórmulas que dan los coeficientes de los dos planos, tenemos:

A = - H sen α
B = H (1 - cos α)
C = - R sen α
D = R H sen α

A = -65 × 0,7071 = - 45,9615
B = 65 × 0,2929 = 19,0385
C = - 20 × 0,7071 = - 14,142

A1 = H sen α

B1 = H(1 - cos α)
C1 = R sen α
D1 = - R H sen α

A1 = 45,9615
B1 = 19,0385
C1 = 14,142

Llevando estos valores a la fórmula que da $tang\ \gamma$ se tiene:

$$tang\ \gamma = \frac{\sqrt{(A\ B1 - B\ A1)^2 + \ (B\ C1 - B1\ C)^2 + \ (C\ A1 - C1\ A)^2}}{A\ A1 + B\ B1 + C\ C1}$$

$$tang\ \gamma = \frac{\sqrt{(-45 * \ 19 - 19 * 45)^2 + \ (19 * \ 14 - 19 * (-14)\ )^2 + \ (-14 * \ 45 - 14 * (-45)\ )^2}}{-45 * 45 + 19 * \ 19 + (-14) * 14}$$

$tang\ \gamma$ = -0,9628

En la Fig. 6 se ve cómo se llega al valor de 136,09º buscado. Representa una circunferencia con centro O en el origen de coordenadas y radio R igual a la unidad. Será:

AB = - 0,9628

Uniendo B con O hasta C se obtiene el ángulo AOC = <u>136,09º</u> (el del diedro de dos caras de la pirámide octogonal que se planteó).

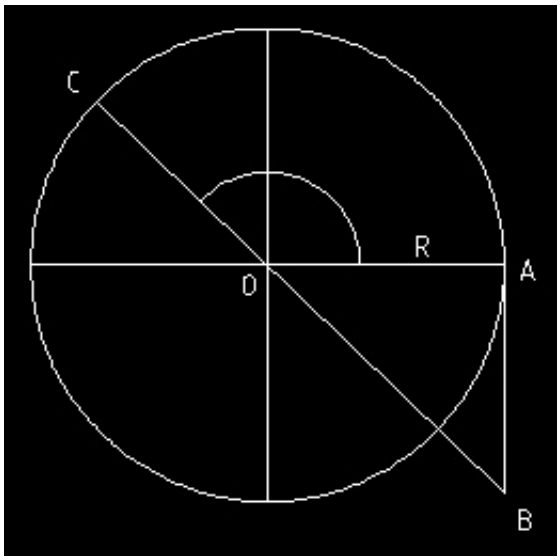

Fig. 6

Terminados los cálculos, es hora de volver a mis caprichos, esos con los que empezaba el artículo. Quería materializar la intersección de dos conos fabricados con sus generatrices. Eran éstas palillos de dientes perfectos terminados en punta alargada; todos iguales para ambos conos.

Ya se ve que unos conos como esos se parecen mucho a pirámides, asimismo esqueléticas. Los conos serían, uno chato y el otro picudo. El de base mayor no ofrecía dificultades para reunir en su vértice 12 palillos: basta un molde piramidal de cartón sobre cuyas aristas laterales se asienten los palillos.

Pero el cono picudo era otro cantar, así que decidí recurrir a lo que ya empleé en mi trabajo sobre *tubos acodados en el espacio.* Ver:

https://caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/vida.pdf (pg. 112 y siguientes)

Se trata de aplicar ahora, en modo circular, lo que entonces resultó imprescindible en el orden lineal: la sucesión de "ángulos de quiebro α" y "ángulos de plano β" (ver la actual Fig. 7 que muestra dos ángulos adyacentes α de los 8 que concurren en el vértice de la pirámide picuda).

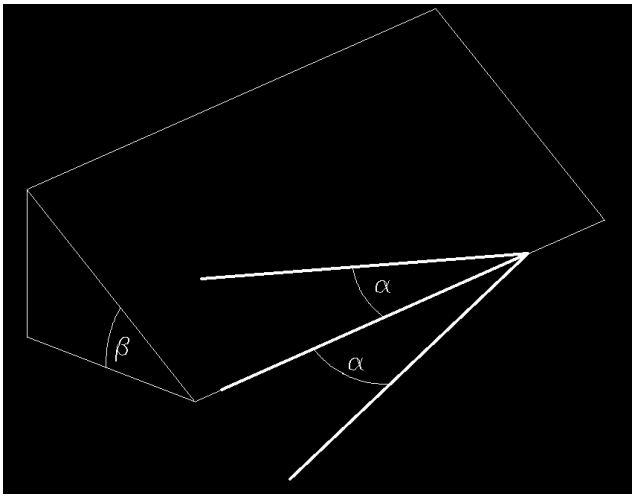

Fig. 7

Como se ve, este α no es el de antes (el AOC de la Fig. 8) que medía 360 / 8 = 45º. El de las Figs. 7 y 8 mide

Ang. AVC = 2 arc sen ((AC / 2) : AV), siendo

AC / 2 = R sen AOV = 20 sen 22,5 = 7,6537

AC = L = 7,6537 × 2 = 15,3

R = radio de la base del cono = 20

H = altura del cono = 65

AV = $\sqrt{(R^2 + H^2)}$

AV = $\sqrt{(20^2 + 65^2)}$ = 68

Ang. AVC = 2 arc sen ((AC / 2) : AV) = 12,93º

El "ángulo de plano β" = 180 – <u>136,09</u> = 43,91º El mismo subrayado, se trata en la Fig. 6.

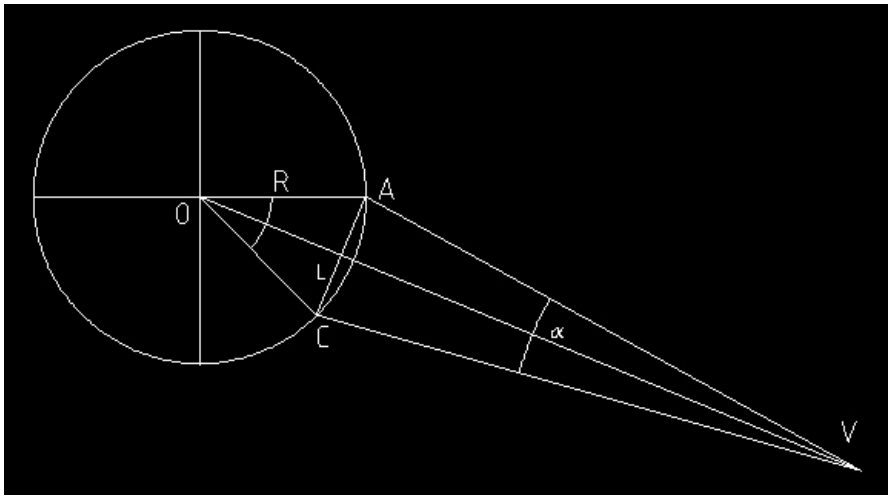

Fig. 8

La Fig. 9 es la materialización del capricho. La intersección de los conos puede parecer una elipse, pero no es tal; en la imagen se ve que el cable- intersección es una curva espacial.

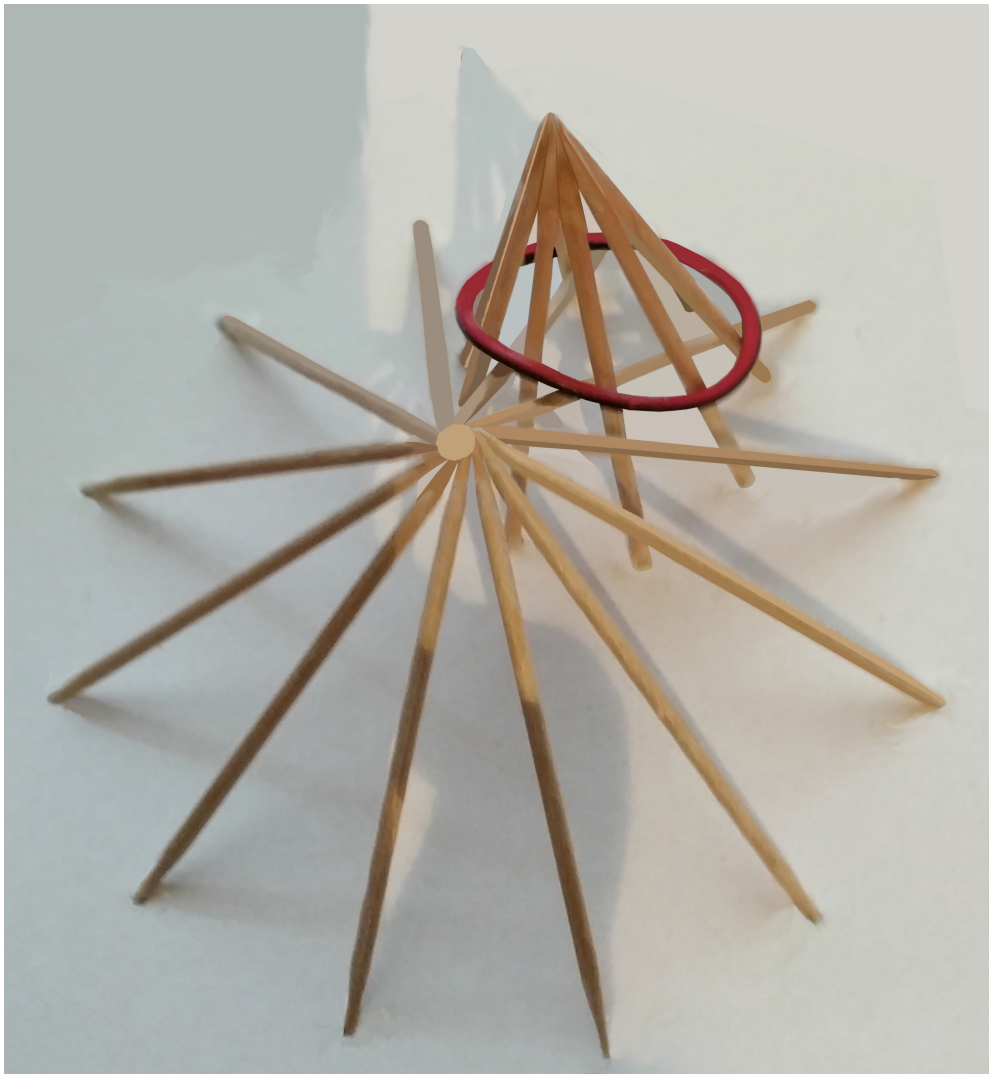

Fig. 9