Jesús de la Peña Hernández

Buscando otra cosa me he encontrado con este hallazgo curioso que describo así:
"Si en un rectángulo cualquiera (Fig. 1) dibujo una sinusoide centrada en él y a tope, abarcando sólo 360º, y luego enrollo el rectángulo en modo cilindro, la sinusoide se convierte en una elipse cuyo plano corta al bies al cilindro quedando dicha elipse como intersección de plano y cilindro".

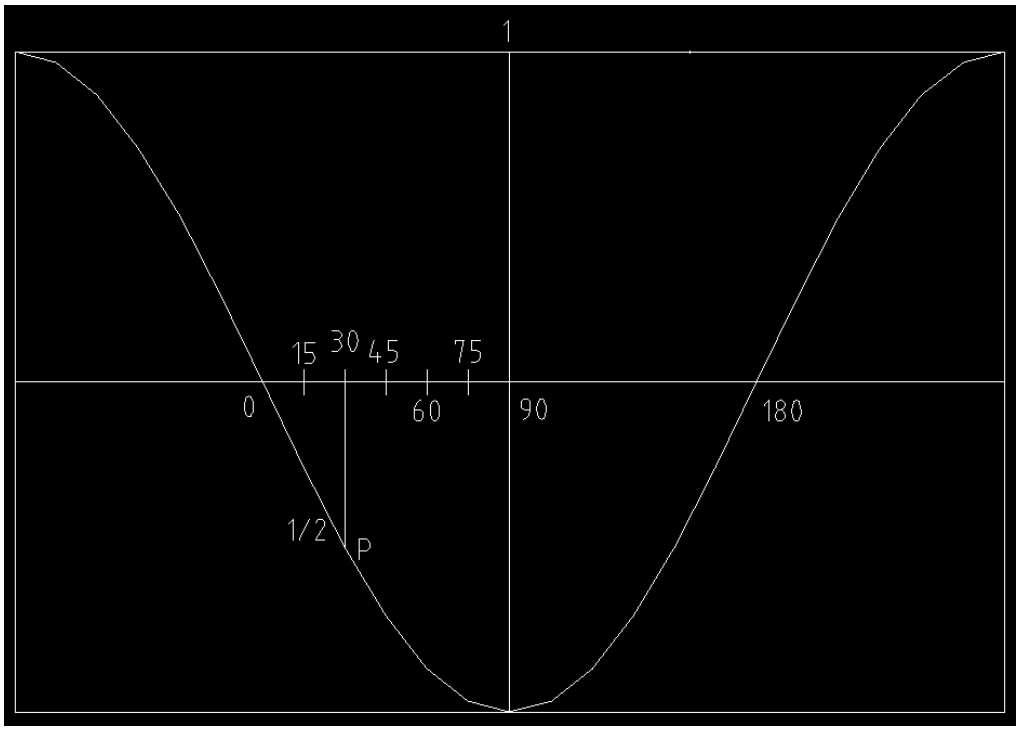


Fig. 1

Tal como se ve la Fig. 1 podemos decir que representa a una sinusoide reducida a la unidad, porque su amplitud se corresponde con la de la función seno que es 1 (el seno de un ángulo no puede ser mayor que 1).

Pero una sinusoide de amplitud H / 2 mm podemos inscribirla en un rectángulo de altura H y base 2 π R. Cuando enrollemos ese rectángulo en modo cilindro, éste tendrá H mm de altura y R mm de radio en la circunferencia de su base.

Fig. 2

La sinusoide de la Fig. 1 está dibujada en la cara vista del papel, pero es conveniente copiarla por transparencia en su cara oculta a fin de poder interpretar lo que muestran las Figs. 2 y 3

En la Fig. 2 se ve que la tangente del ángulo (marcado) que forma con la base del cilindro el plano de la elipse es H / 2R. Y que el semieje mayor de elipse es a, siendo

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + 4R^2}$$

Asimismo se ve que el semieje menor b de la elipse mide b = R.

Observando en la Fig. 1 el punto P y el que sería su simétrico respecto de 0 sobre la misma curva, se ve que determinan prácticamente un segmento. Pues mirando ese cuasi segmento en la Fig. 2, se aprecia su conversión a la curvatura de la elipse asentada sobre la superficie curva del cilindro y coincidente con el entorno del vértice chato de la elipse.

La Fig. 3 ofrece otra visión distinta de la 2 para el conjunto cilindro / elipse. Comparándola con la 1 se ve cómo P está situado a 30º para un valor de sen 30 = ½.

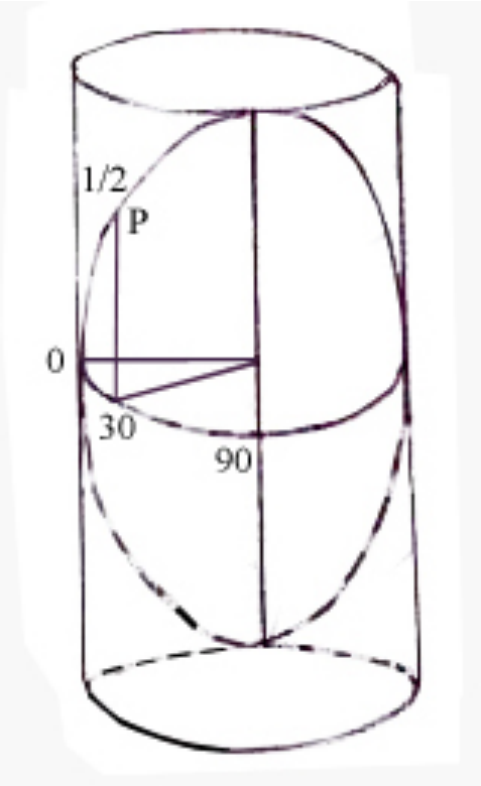


Fig. 3

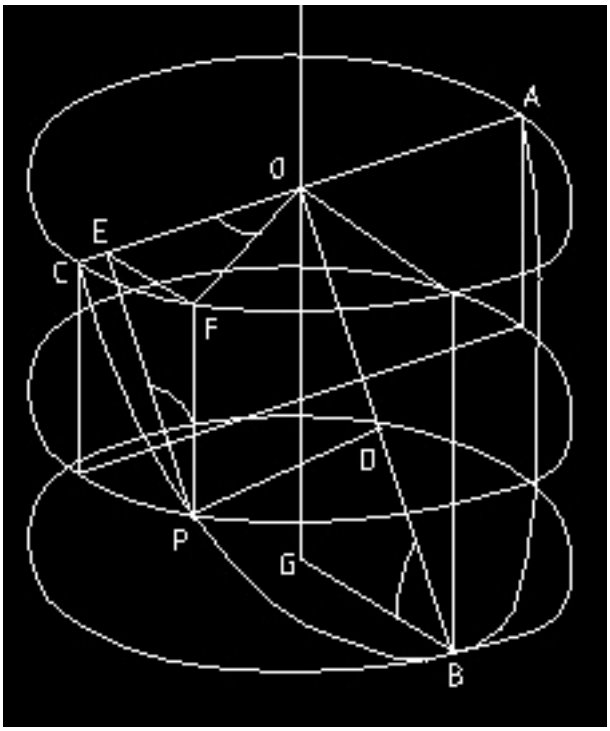


Fig. 4

Esto último se pone de manifiesto en la Fig. 4 que muestra:

-Los tres vértices ABC de la elipse.
-Sus semiejes a = OB y b = OC = R.
-Tres circunferencias asentadas en el cilindro:
La superior, de centro O (del cilindro y de la elipse.)
La que pasa por P que es, además, punto de la elipse.
La inferior que pasa por su vértice B.
-P está a 30º según el ángulo marcado COF.
-El ángulo marcado OBG cuyo seno es OG / OB = (H / 2)/ a. Es el ángulo que forman el plano de la elipse y la base del cilindro. Es el complementario del ángulo marcado EPF.

En el caso que nos ocupa, el gran rectángulo que inscribe la sinusoide en la Fig. 1, tiene de base 180 mm y 120 mm de altura. Será:

H = 120 mm
R = 180 / 2 π = 28,6479 mm.

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + 4R^2}$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{120^2 + 4\times 28.6479^2} = 61{,}6861mm$$

Ya hemos visto en la Fig. 1 que el punto P está sobre la sinusoide del papel, es decir sobre la superficie cilíndrica. Vamos a demostrar que también está sobre la curva elipse que se ha creado. Si así fuera, sus coordenadas x, y en el plano coordenado de la elipse con centro en O, satisfarían a la ecuación de dicha elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

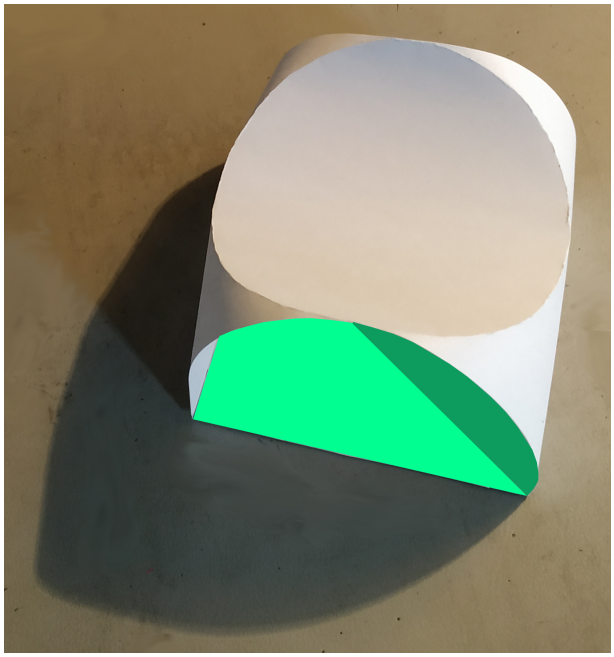
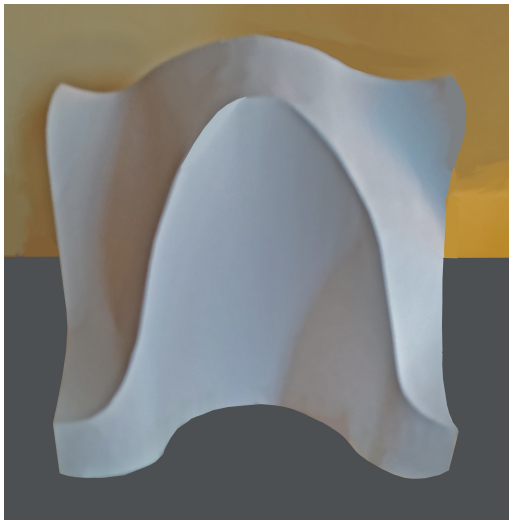
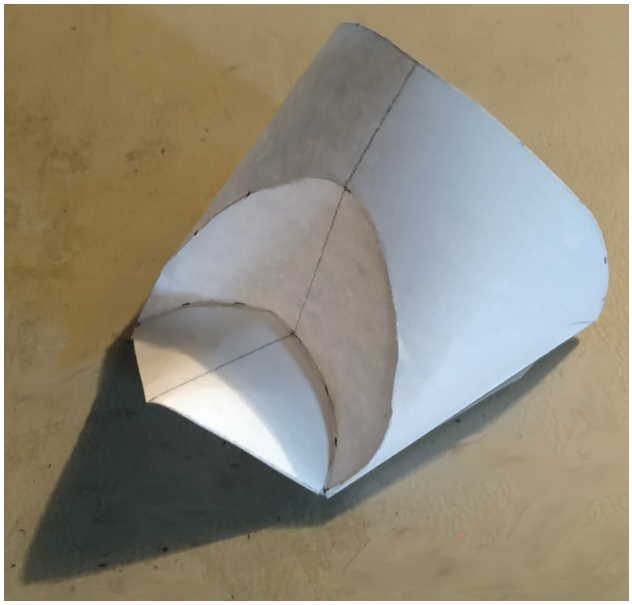
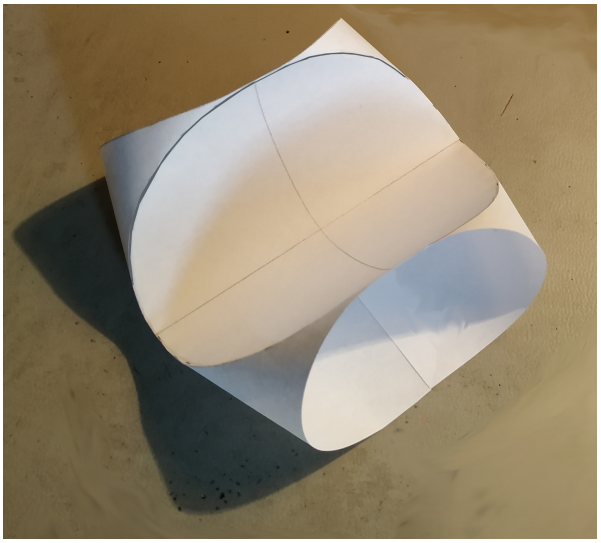
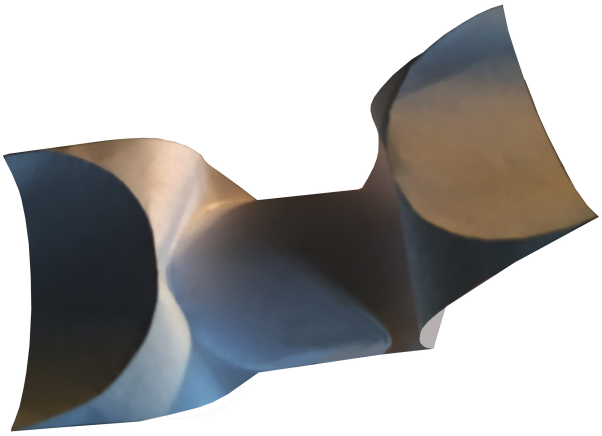
En la Fig. 4 es
x = OD = EP
En el triángulo rectángulo EPF es
EP = EF / sen EPF
<EPF = 90 – <OBG = 90 – Arc sen ((H / 2)/ a)
En el triángulo rectángulo OEF es
EF = OF sen EOF = R sen 30 = R / 2
x = PE = (R / 2) / sen EPF = (R / 2) / cos OBG
cos OBG = GB / OB = R / a
x = (R / 2) / (R / a) = a /2
x = 61,6861/2 = 30,843

y = PD = OE = OF cos FOE = R cos 30 = 0,866 R
y = 0,866 × 28,6479 = 24,8091

a = 61,6861
b = 28,6479

$$30{,}843^2 / 61{,}6861^2 + 24{,}8091^2 / 28{,}6479^2 = 0{,}9999$$

LQQD.

OTRAS METAMORFOSIS

Las de cinco figuras planas, de papel: