<u>Probabilidad y analogías geométricas</u>

Lo que sigue son comentarios sobre lo que trata Martin Gardner en su estudio *Probability and ambiguity*, que apoyaré refiriéndome en primer lugar al teorema de Viviani que se enuncia así (Fig. 1):

"Si desde cualquier *punto interior* de un triángulo equilátero se trazan las tres perpendiculares a sus lados, la suma de los tres segmentos resultantes es igual a la altura del triángulo equilátero de partida".

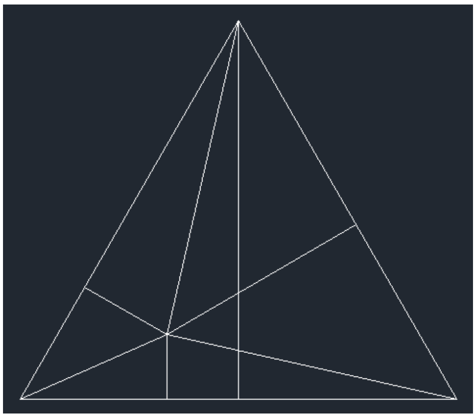

Fig. 1

Se demuestra con dicha Fig. 1 en la que se ve un triángulo equilátero con su altura vertical, y un *punto interior* que unido a los vértices del triángulo lo divide en otros tres, mostrados a su vez, con sus respectivas alturas. La suma de las áreas de estos tres triángulos es, evidentemente, igual al área del triángulo equilátero. Como los tres triángulos tienen igual base (el lado del triángulo equilátero), resultará que la altura de éste ha de ser igual a la suma de las otras tres alturas, es decir, de las distancias del *punto interior* mencionado, a los lados del triángulo equilátero de partida.

M. Gardner aplica este teorema para estudiar la probabilidad derivada de dividir un *palo recto* en tres, naturalmente, más pequeños, para construir con ellos un triángulo. Como el *palo recto* es la suma de los tres pequeños, estamos ante el teorema de Viviani.

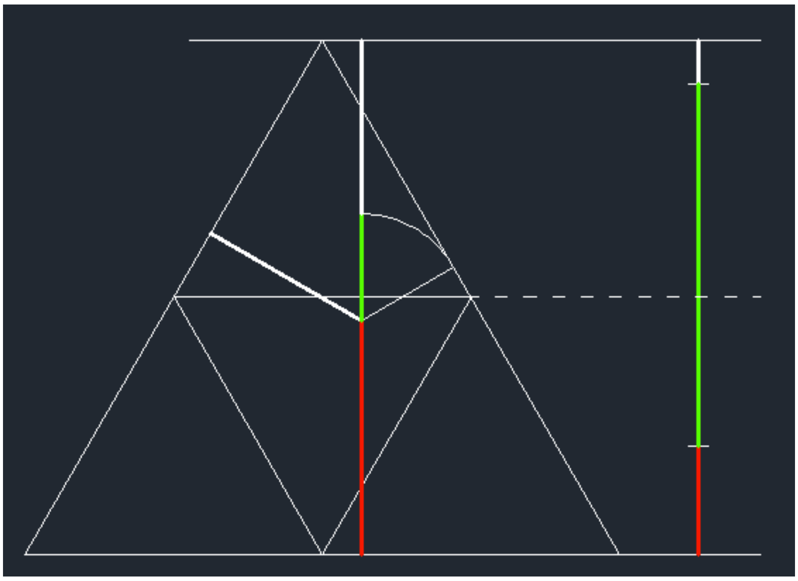

Fig. 2

En la Fig. 2 se ve, a la izquierda, el *palo recto* ya dividido en los tres palitos (blanco, verde y rojo) asociado al gran triángulo equilátero en el que equivale a su altura. Veamos la maniobra.

Supongamos que hemos dado el primer corte en el punto verde / rojo produciendo dos palitos: el largo (blanco + verde) y el corto rojo. El segundo corte podríamos darlo en cualquiera de los dos palitos resultantes, pero si lo diéramos en el corto (rojo) no obtendríamos tres lados para un triángulo porque uno (el blanco + verde) es mayor que la suma de los otros dos (los que saldrían del rojo).

Además, cada uno de los tres palitos ha de ser menor que la mitad del *palo recto* porque si uno fuera igual a dicha mitad, un lado sería igual a la suma de los otros dos y no se podría formar un triángulo. Todas estas limitaciones las expresa Ángela Dunn en su libro MATHEMATICAL BAFFLERS, de la siguiente manera:

-Los dos cortes han de darse a cada lado del punto medio del *palo recto*.

-Los tres palitos resultantes serán menores que la mitad de dicho *palo recto*.

Como se ve, estas dos exigencias se cumplen en la Fig. 2 que añade la solución al problema de la probabilidad. El punto de intersección de las tres alturas de Viviani está situado dentro del triangulito equilátero central cuya área expresa el campo de lo favorable. El campo de lo posible es el de los cuatro triangulitos. Por tanto, la probabilidad de poder construir triángulo con los tres palitos obtenidos del *palo recto* será de 1 / 4.

Mirando en la Fig.2 los dos *palos rectos* se ve que en el de la izquierda (al que nos hemos referido hasta ahora) los dos cortes se han dado, respectivamente, a cada lado del punto medio de dicho palo recto. En el de la derecha, en cambio se pone de manifiesto que la condición anterior, que es necesaria, no es suficiente: los dos cortes están exageradamente distantes del punto medio para mostrar que si bien los palitos blanco y rojo son menores que la mitad del palo recto, el verde es mucho mayor que esa mitad, con lo cual, no se podrá formar el triángulo blanco / verde / rojo.

Con todo lo anterior se pone de manifiesto la preocupación de M. Gardner por la necesidad de explicar con todo detalle y precisión el mecanismo probabilístico que pueda presentarse en cada ocasión, a fin de evitar ambigüedades. En su apoyo propone en el mismo estudio otra ambigüedad probabilística que ya fue planteada por el matemático francés del siglo XIX J. Bertrand. Se enunciaba como sigue y será desarrollada en tres soluciones con sus correspondientes ejemplos de aplicación.:

"Calcular la probabilidad de que una cuerda trazada sobre una circunferencia sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito en ella".

El planteamiento es así de escueto y más sencillo que el de los palitos, aunque no es menos ingenioso. Veamos las tres formas distintas de desarrollarlo.

SOLUCIÓN 1

La Fig. 3 muestra la circunferencia con su triángulo equilátero inscrito (en rojo). Por su vértice inferior se traza una tangente a la circunferencia y, entre los dos rayos de aquella, una multitud de cuerdas cuyos extremos serán, respectivamente, el vértice inferior del triángulo y el punto de corte de cada una con la circunferencia.

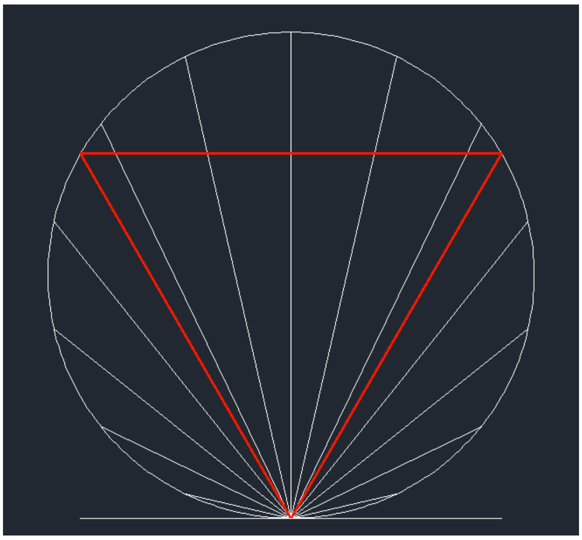

Fig. 3

¿Qué probabilidad hay de que esas cuerdas tengan una longitud mayor que el lado del triángulo?

A la vista está que las cuerdas que sobrepasan el lado horizontal del triángulo son las que cumplen la condición. Es decir las que determinan el conjunto favorable de estar intercaladas dentro del ángulo de 60º (el inferior del triángulo).

El conjunto de todas las cuerdas posibles dentro de la configuración planteada es el de todas las cuerdas que parten del vértice del ángulo llano (180º) determinado por la tangente.

La probabilidad será, por tanto, 60 / 180 = 1 / 3.

UN EJEMPLO (Fig. 4)

En el centro de una circunferencia pivotan dos agujas (verde y amarilla) que pueden girar libre e independientemente una de otra. Se aplica a cada una un impulso para que gire; al cabo de cierto tiempo ambas se habrán detenido en una posición semejante a la de la figura.

La probabilidad de que la cuerda blanca sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscribible en la circunferencia será de 1 / 3. Es decir, una de cada tres tiradas será, probablemente, exitosa.

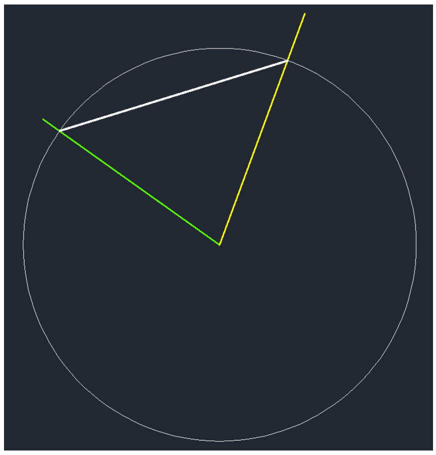

Fig. 4

SOLUCIÓN 2

La Fig. 5 muestra la circunferencia con su triángulo equilátero inscrito (en rojo) en tal posición que su base resulte horizontal. Dividiendo el diámetro vertical en 8 partes iguales, podemos dibujar las seis cuerdas horizontales (blancas) y las dos secantes verticales que están separadas tanto como el lado del triángulo. Ello nos evidencia que están dibujadas 3 cuerdas mayores que el lado del triángulo.

Como se sabe (Fig. 6), la distancia del centro del triángulo (y de la circunferencia; circulito rojo) dista el doble del vértice superior que de la base del triángulo, cosa que se evidencia en la figura. De ello se deduce que el segmento rojo (cuatro partes del diámetro) es la mitad de éste.

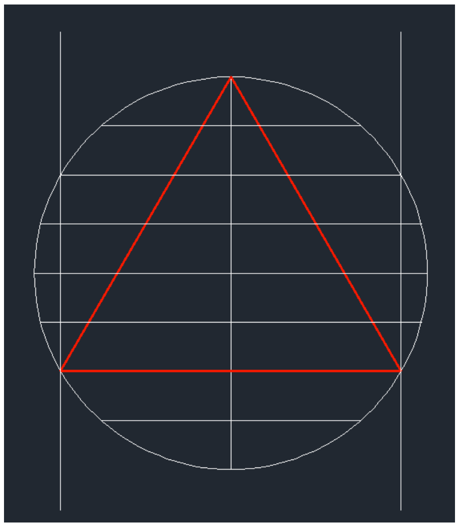

Fig. 5

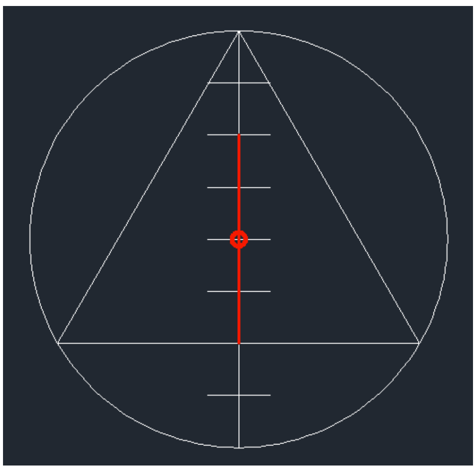

Fig. 6

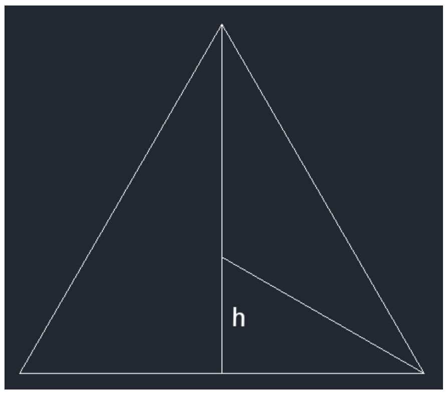

Fig. 7

Lo que se dice para la Fig. 6 se demuestra en la Fig. 7. Si llamaos H a la altura del triángulo y l a su lado, dados los triángulos rectángulos semejantes que se producen, será:
$h / (l / 2) = (l / 2) / H$

$h = (l^2 / 4) / H$

Por otra parte

$H = \sqrt{(l^2 - (l^2 / 4))} = l\sqrt{(3)} / 2$

Así que

$h = (l^2 / 4) / (l\sqrt{(3)} / 2) = l\sqrt{(3)} / 6$

Eliminando l, queda:

$H / h = 3$

Volviendo a la Fig. 5 se aprecia que las cuerdas mayores que el lado del triángulo son las tres que pisan sobre el interior del segmento rojo de la (Fig. 6), es decir, las cuerdas favorables son todas las normales a medio diámetro, mientras que las posibles son todas las correspondientes a un diámetro completo. La probabilidad será, pues, de 1 / 2.

UN EJEMPLO

Dibujamos en el suelo una circunferencia con un triángulo equilátero inscrito en ella. Después tiramos desde fuera del dibujo un rodillo delgado para que ruede sobre la circunferencia a lo largo del diámetro normal a la base del triángulo, de forma que se pare antes de sobrepasar la circunferencia.

La probabilidad de que el rodillo parado determine sobre la circunferencia una cuerda de longitud superior al lado del triángulo es de 1 / 2.

SOLUCIÓN 3

Se exige que el punto medio de la cuerda que ha de ser mayor que el lado del triángulo equilátero esté siempre dentro del círculo que lo circunscribe. ¿Con qué probabilidad ocurrirá esto?

La Fig. 8 muestra el triángulo equilátero con sus circunferencias inscrita y circunscrita. Si nos fijamos en la base como una de las cuerdas buscadas veremos que hay que descartarla porque no es mayor que el lado (es igual).

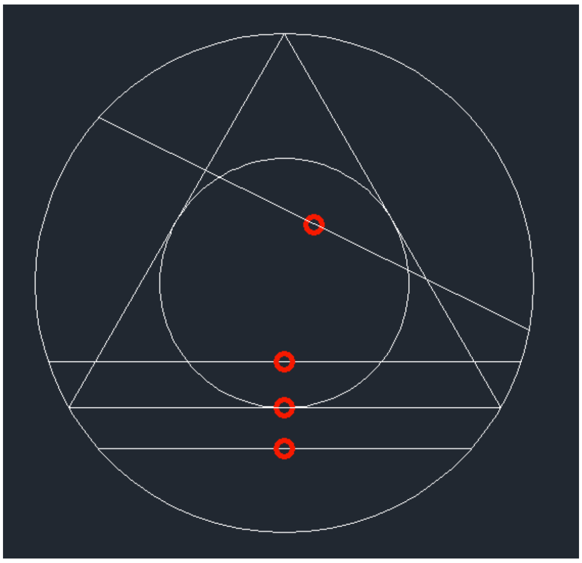

Fig. 8

Si la movemos algo, paralelamente hacia arriba (con sus extremos sobre la circunferencia), ya cumple con la exigencia. Pero si la movemos hacia abajo no cumple por resultar más corta que el lado del triángulo equilátero.

La cuerda inclinada cumple con la exigencia porque si la movemos paralelamente a sí misma según la normal por su punto medio hasta alcanzar la tangencia con la circunferencia inscrita, veremos que la cuerda mide lo que el lado del triángulo equilátero.

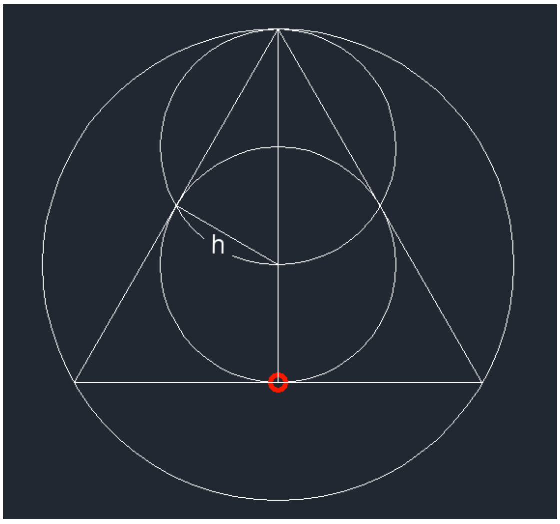

Fig. 9

¿Qué tienen en común las dos cuerdas favorables? Que ambas tienen su punto medio dentro de la circunferencia inscrita. Por tanto, de todos los puntos medios posibles (los interiores a la circunferencia grande) hay que descartar los que caigan dentro de la corona y los que estén sobre la circunferencia pequeña.

Veamos la relación de las áreas de los círculos inscrito y circunscrito (Fig. 9). Como hemos visto antes que H / h = 3, ahora tendremos que:

Radio de la circunferencia inscrita = h

Radio de la circunferencia circunscrita = 2h

Relación de las áreas de los dos círculos, circunscrito e inscrito = $(4 \pi h^2) / (\pi h^2) = 4$

De todos los puntos posibles (los interiores al círculo grande), sólo los interiores al círculo pequeño son favorables. Luego la probabilidad de cumplir con la exigencia pedida es de 1 / 4.

UN EJEMPLO

Pintemos en el suelo un círculo con melaza que atraerá moscas a posarse sobre él. Cuando una se haya posado, trazamos una cuerda de tal manera que la mosca sea el punto medio de dicha cuerda (recta perpendicular al radio que contiene a la mosca y pasa sobre ella).

La probabilidad de que esa cuerda sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo, es de 1 / 4 (es decir, de que la mosca se haya posado dentro del círculo inscrito).