

EL JUEGO DE BILLAR ORTOGONAL



Como son tres, Rajoy va a tratar de resolver una ecuación de tercer grado pero, para alegría de los otros, no va a poder. Y es que lo del dibujo de Mingote, aunque parezca mentira, no es un juego de billar ortogonal. Y si no, vean.

FUNDAMENTO DEL JUEGO DE BILLAR ORTOGONAL

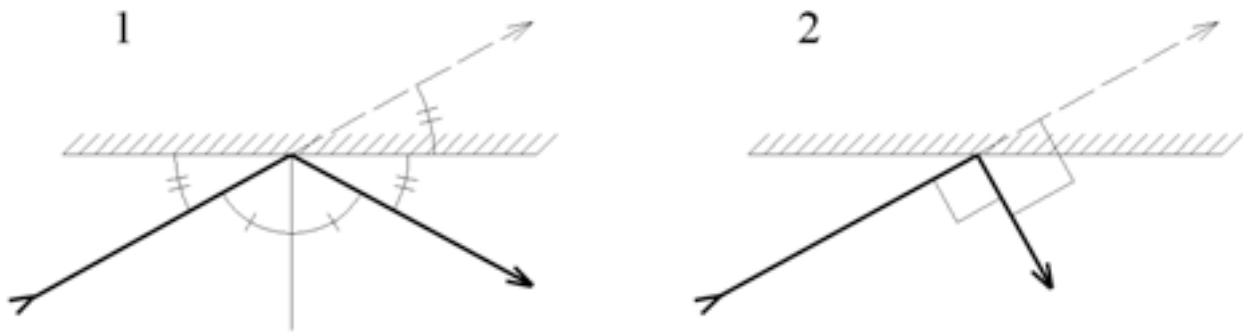
Este juego es una ingeniosa hipótesis original de Humiaki Huzita inspirada en el billar convencional. H.H es un matemático japonés emigrado a Italia para estudiar física nuclear en la Universidad de Pisa. Tiene en común con mi amigo el californiano Robert Lang el haberse desbordado desde la Física a la Papiroflexia.

H.H, formuló los 6 Axiomas de la matemática papirofléctica; el añadido Postulado nº 7 se debe a Koshiro Hatori, Jacques Justin y Robert Lang.

El juego de billar ortogonal se funda en el Axioma nº 6 que se enuncia así:

*Dados en el plano del papel dos puntos P_1 y P_2 y dos rectas l_1 y l_2 se puede ejecutar una línea de plegado de forma que lleve, **simultáneamente**, el punto P_1 sobre l_1 y el P_2 sobre l_2 .*

La hipótesis consiste en que, contra lo que ocurre en el billar convencional (Fig. 1; ángulo de incidencia, igual a ángulo de reflexión), en el billar ortogonal la reflexión de la bola al incidir sobre la banda se produce según un ángulo recto con la dirección incidente (Fig. 2).



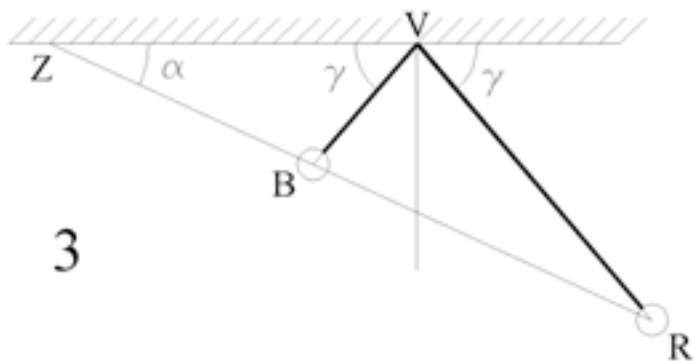
La hipótesis de H.H resulta muy útil para resolver problemas de una gran variedad, tanto geométricos como algebraicos. Entre los primeros cabe citar la trisección de un ángulo o el dibujo de un heptágono regular convexo. Aquí, sin embargo me voy a fijar en algunas aplicaciones algebraicas. Veamos primero cómo se comportan las bolas del billar en cada una de las dos siguientes condiciones.

Jugada a una sola banda

En el billar convencional (Fig.3), cuando atacamos la bola Blanca contra la banda para que rebote en la Roja, siempre hay una solución para acertar en el golpe. Los datos de que partimos son: BZ; RZ; α .

La incógnita es el ángulo γ con el que la bola Blanca ha de incidir sobre la banda.

Al ser ZV común en los ΔZVB y ΔZVR , se tiene:



$$\frac{ZV}{\text{sen}(\alpha + \gamma)} = \frac{ZB}{\text{sen}\gamma} \quad ; \quad \frac{ZV}{\text{sen}[\pi - \alpha - (\pi - \gamma)]} = \frac{ZR}{\text{sen}(\pi - \gamma)}$$

Igualando ZV:

$$ZB \frac{\text{sen}(\alpha + \gamma)}{\text{sen}\gamma} = ZR \frac{\text{sen}(\gamma - \alpha)}{\text{sen}\gamma}$$

desarrollando:

$$(ZR + ZB)\text{sen}\alpha \cos\gamma = (ZR - ZB)\cos\alpha \text{sen}\gamma$$

$$\text{tg}\gamma = \frac{2ZB + BR}{BR} \text{tg}\alpha$$

Para encontrar el punto V, seguir la Fig. 3.1 (R' es el simétrico de R).

Teniendo las bolas B, R se trata de encontrar la trayectoria de B a R después de golpear las dos bandas.

La solución se obtiene (Fig.6):

* Trazando X' e Y' paralelas a las bandas por C y U, los simétricos de B y R respecto de dichas bandas.

* Plegando **simultáneamente** B sobre X' (produce A) y R sobre Y' (produce T). Se trata de una doble simultaneidad (dos puntos sobre dos rectas).

* La línea (discontinua) de plegado en valle DS determina el tramo medio del trayecto de B a R.

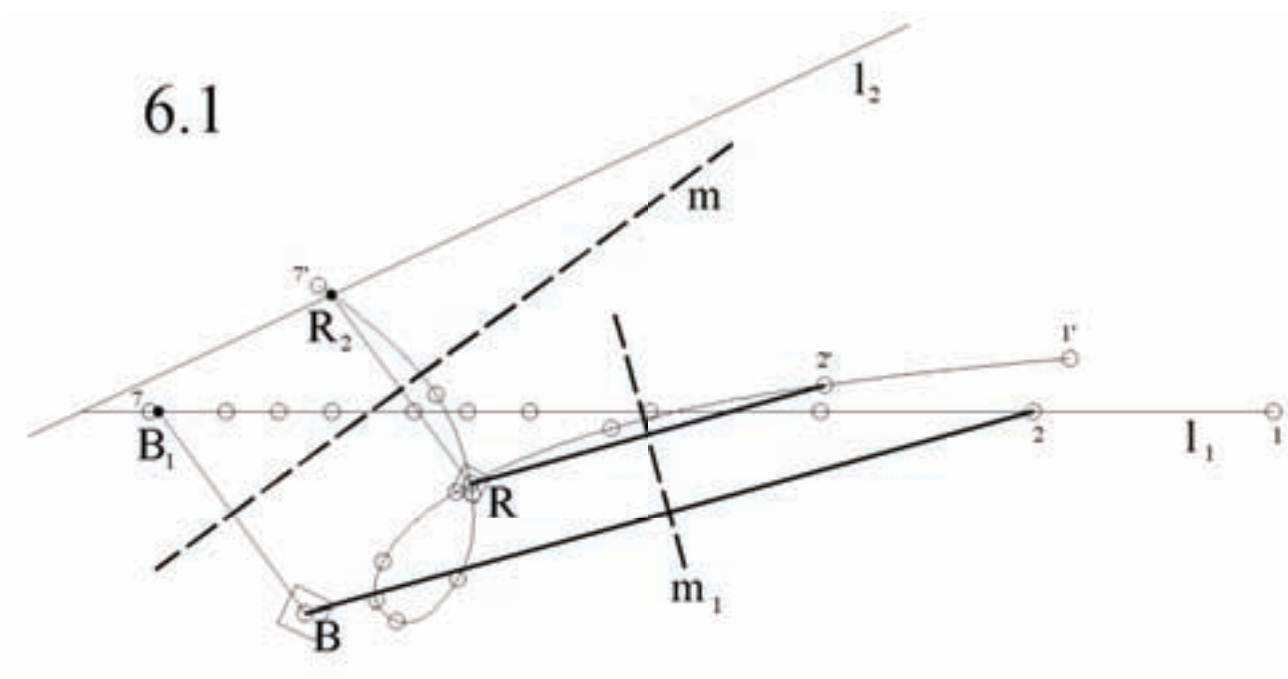
* Como esa línea de plegado es eje de simetría y la banda por D es paralela media del ΔABC , el ángulo recto en D se asienta en esa banda horizontal. Otro tanto puede decirse del ΔRTU y la paralela por S a TU.

CABRI (F. J. García Capitán)

CABRI es un programa informático que juega con lugares geométricos, que es de gran utilidad para cosas diversas y que resulta ser una ayuda inestimable para poder dibujar con precisión, el resultado del cómodo tanteo que se practica en un plegado simultáneo de HH.

Como yo no dispongo de él, voy a simular su ejecución “a mano” mediante AUTOCAD haciendo uso, para generar el lugar geométrico, de una curva SPLINE (Línea de Segmentación Polinómica, con interpolación cúbica).

Lo voy a utilizar según la Fig. 6.1 aplicado al Axioma nº 6 que se enunciaba al principio. Así se mostrará su uso de una forma generalizada.



Sean dos rectas cualesquiera l_1 y l_2 , y dos puntos B y R (aparecen inscritos en sendos cuadrados para distinguirlos)

El Axioma nº 6 nos pide llevar B a B₁ (punto negro en la recta l₁) y simultáneamente R a R₂ (punto negro en la recta l₂) mediante un plegado según la mediatriz m.

CABRI nos conduce a la línea de plegado m evitando tanteos, mediante esta sistemática:

* Tomar sobre l₁ p.e siete puntos (1,2, ... 7).

* Para cada uno de ellos (se muestra el proceso para el punto 2):

- Hallar la mediatriz m₁ de B2.
- Obtener 2' simétrico de R respecto de m₁.

* Con todos los puntos 1', 2', ... 7' dibujar la curva SPLINE correspondiente que resulta tener en este caso, a R como punto doble.

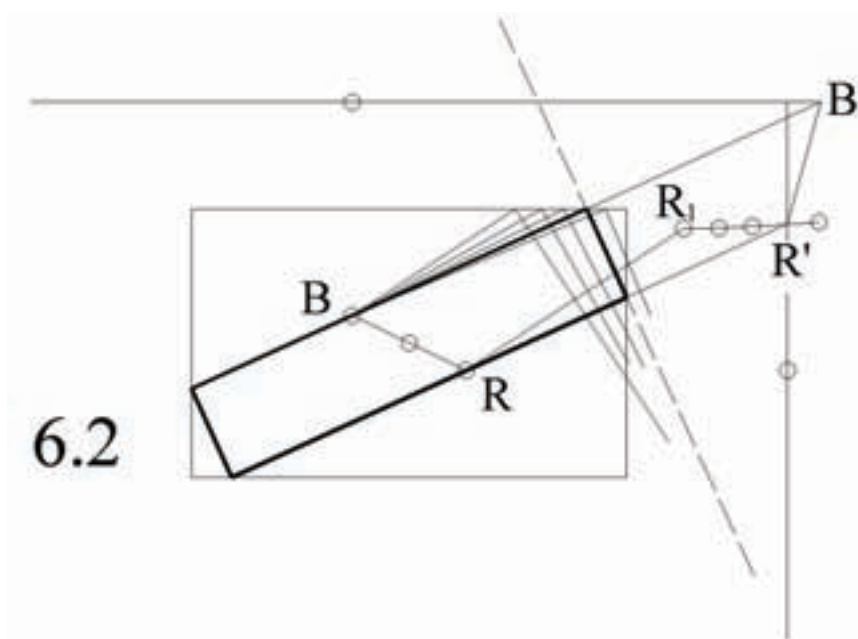
* Donde esa curva corta a l₂ está R₂ de tal manera que la mediatriz m de RR₂ resulta ser la línea de plegado que se busca: R₂ está algo antes de 7' igual que B₁ está algo antes de 7.

Jugada a cuatro bandas (billar ortogonal)

Jugar a cuatro bandas con el billar ortogonal equivale a inscribir otro rectángulo en el rectángulo de las bandas. La simulación consistiría en poner una bola en cualquier punto de la mesa e impulsarla con el taco para que, *en su camino ortogonalizado* chocara con otra bola situada en el mismo lugar que ocupaba la impulsada.

Es decir, se trata de inscribir en el rectángulo de las bandas, otro que pase por un punto cualquiera del interior de la superficie verde.

Mariano Nieto reduce esta situación a la de las figuras 5 y 6 porque el rectángulo inscrito ha de ser concéntrico con el exterior de las bandas y por tanto dicho rectángulo inscrito ha de contener también al punto simétrico del punto dado, respecto de ese centro común. La Fig. 6.2 resuelve el problema como si se tratara de la Fig. 6, pero recordando que aquella Fig. 6 lo único que hace es dar fe de lo que se obtuvo con el *tanteo plegatorio*, pero *no produce* la solución. Ésta la da CAPRI como veremos a continuación.



Sea el punto B en la mesa que produce su simétrico R respecto del centro del rectángulo de las cuatro bandas.

Obtenemos los simétricos de B respecto de la banda superior y de R respecto de la banda derecha. Por estos puntos simétricos hacemos pasar sendas paralelas a las bandas correspondientes.

Por B trazamos cuatro ángulos rectos con sus vértices en la banda superior.

Sucesivamente obtenemos los cuatro puntos simétricos de R respecto de cada lado emergente de aquellos ángulos rectos.

P.e, el lado emergente del primer ángulo recto es la mediatriz de BR_1 siendo R_1 el primero de los cuatro puntos simétricos de R.

Trazamos la curva Spline que une los cuatro puntos simétricos (cuatro pequeños círculos) y que corta en R' a la vertical derecha. La mediatriz de RR' (de trazos) es la línea de plegado buscada.

Comprobación: Al plegar, B cae sobre B' (en la horizontal superior) y R sobre R' (en la vertical derecha) formándose el trapecio isósceles $BB'R'R$ que a mí me gusta llamar de J. Justin.

Los plegados restantes para conseguir el rectángulo inscrito, son inmediatos.

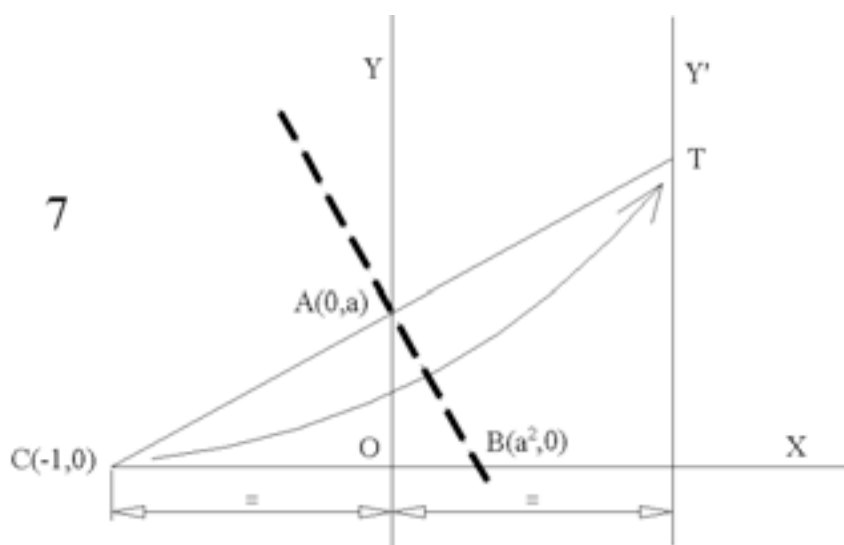
CUADRADOS Y RAÍCES CUADRADAS

CUADRADOS

Antes de nada hay que decir que estas operaciones utilizan la simulación del billar ortogonal jugando a una sola banda que es cosa más sencilla, como se verá, pero que no se ha analizado antes. Aquí se maneja una simultaneidad sencilla, es decir, un punto sobre una línea, y un punto doble para determinar la simetría plana.

Conviene advertir que para este tipo de plegados es recomendable utilizar papel transparente o, mejor aún, aprovechar la transparencia de un cristal de ventana sobre el que asentar el papel.

Tratemos de hallar el cuadrado de a (Fig. 7).



* Partir de los puntos $C(-1,0)$ y $A(0,a)$.

* Plegar: $C \rightarrow Y'$ (resulta T) y, **simultáneamente**, $A \rightarrow A$ (A será punto doble en la simetría plana, es decir, resultará ser un punto del eje de simetría -la línea de plegado-).

* La línea de plegado (en valle) produce el punto B cuya abscisa es el cuadrado de a.

Justificación:

El ΔABC es rectángulo y en él, su altura AO es media proporcional entre OC y OB.

$$OA^2 = 1 \times a^2$$

Obsérvese que en este caso, el cuadrado (a^2) es menor que el número (a) por ser éste menor que 1.

RAÍCES CUADRADAS

Si en la Fig 7 hubiéramos querido hallar la raíz cuadrada de a^2 , el proceso habría sido el inverso:

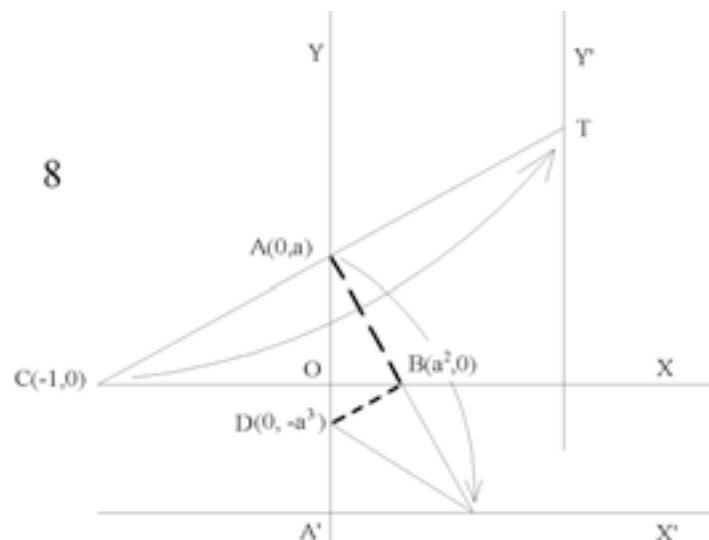
* Partir de los puntos $C(-1, 0)$ y $B(a^2, 0)$.

* Plegar: $C \rightarrow Y'$ (resulta T) y, **simultáneamente** $B \rightarrow B$ (B será punto doble en la simetría plana).

* Así obtendremos $A(0,a)$ sobre el eje Y por intersección de este eje con la línea de plegado. La misma justificación de antes da que $a = \sqrt{a^2}$.

LA ESPIRAL ORTOGONAL DE POTENCIAS

En la Fig. 7 se expresa la relación numérica y geométrica de la unidad, una cantidad a y su cuadrado. Si quisiéramos hallar las potencias sucesivas de a sólo tendríamos que iterar el proceso iniciado, bien mediante plegados sucesivos Fig. 8, o con el instrumental de dibujo (Fig. 9).



En la Fig. 8 se ha añadido a la Fig. 7 el siguiente proceso:

* Obtener X' paralela a X por A' que es el punto simétrico de A respecto a X.

* Plegar : $A \rightarrow X'$ y **simultáneamente**, $B \rightarrow B$.

* La nueva línea de plegado BD produce $OD = a^3$.

Justificación:

El $\triangle ABD$ es rectángulo y en él se cumple:

$$OB^2 = AO \times OD \quad ; \quad (a^2)^2 = a^4 = a \times OD \quad ; \quad OD = a^3$$

OBSERVACIONES A LA FIG. 8

* En ella aparecen coordenadas negativas cuando son exigidas por el plano cartesiano. En la práctica han de tomarse simplemente los valores absolutos.

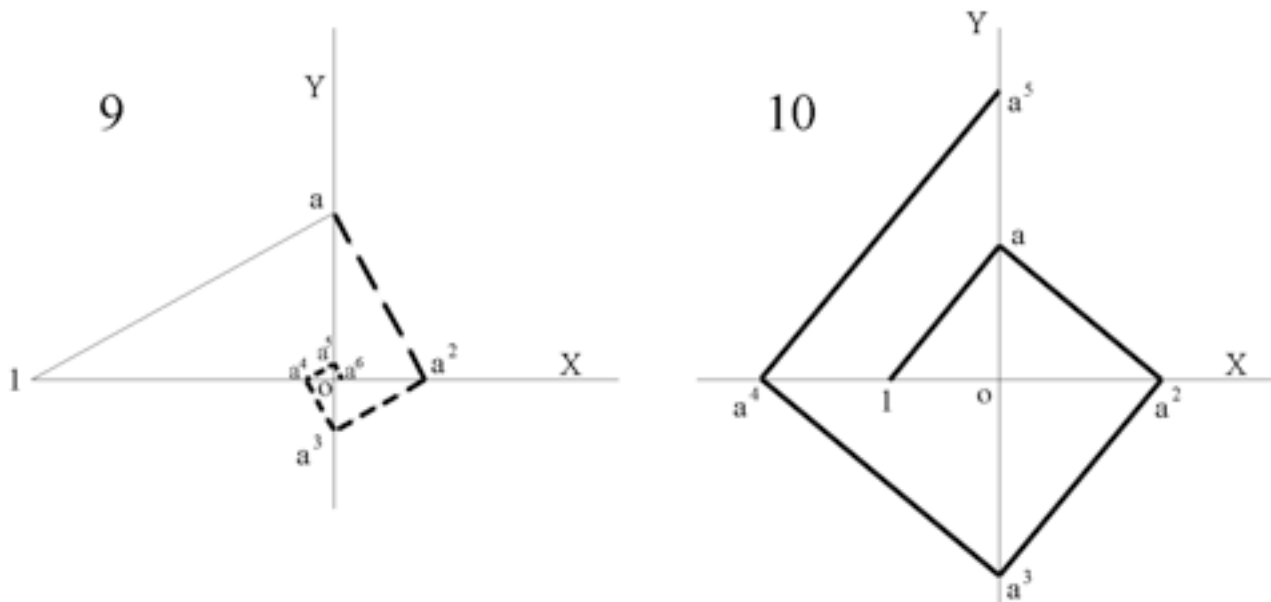
* Las líneas discontinuas de plegado en valle (gruesas) se limitan a lo puramente geométrico de la figura aunque al plegar, las correspondientes cicatrices han de extenderse a lo largo de toda la superficie del papel.

* Sólo se muestran como cicatrices las líneas de plegado más relevantes, aunque la mayoría de las otras líneas también se pueden obtener plegando (las líneas X' o Y' , por ejemplo).

* Aunque aparecen las dos líneas simétricas X' e Y' , está claro que no se corresponden con un plegado de doble simultaneidad como el de la Fig. 6. Son en realidad dos plegados de simultaneidad sencilla, sucesivos.

* Se puede apreciar cómo se van adosando sucesivamente, uno junto a otro, los triángulos rectángulos clave que producen las consiguientes potencias de a . Para cada uno de ellos puede aplicarse la misma justificación antes empleada. El conjunto se muestra en la Fig. 9.

* Dicha Fig. 8 también muestra cómo se inicia el trazado de la espiral ortogonal de potencias determinado por las dos primeras cicatrices de plegado en línea discontinua. En la Fig. 9 toda la espiral está hecha con las cicatrices de los plegados.



La Fig. 10 es otra expresión de la espiral ortogonal de potencias en la que $a > 1$. Ello da lugar a una espiral que se abre, contrariamente a lo que ocurre en la Fig. 9 cuando $a < 1$; ahí las potencias de a son decrecientes y por tanto, la espiral se cierra. En la Fig. 10 se han resaltado todos los tramos de la espiral para recordar que $a^0 = 1$.

En ambas figuras, 9 y 10, se ve que las sucesivas potencias de a se asientan sobre los ejes de coordenadas, las pares en abscisas y las impares en ordenadas.

RAÍZ CÚBICA

En la Fig. 11 se muestra cómo extraer la raíz cúbica de $b = 8$ siguiendo este proceso:

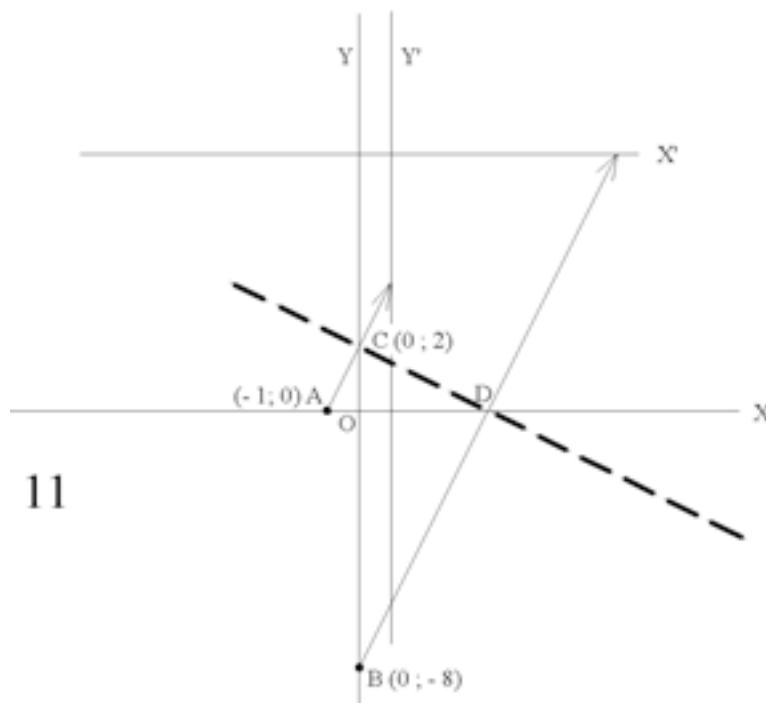
- * Llevar la unidad al punto A; el punto B representa al radicando $b = 8$.
- * Trazar X' paralela al eje de abscisas y distante de éste tanto como B.
- * Trazar Y' paralela al eje de ordenadas, distando de éste la unidad.
- * Llevar **simultáneamente** A sobre Y' y B sobre X' ; la línea de plegado es CD.
- * Así resulta que $OC = 2$ es la raíz cúbica buscada para $b = 8$.

Justificación:

Mirando los triángulos ACD y BCD, se tiene:

$$OC^2 = 1 \times OD \quad ; \quad OD^2 = OC \times OB \quad ; \quad OC^4 = OC \times OB$$

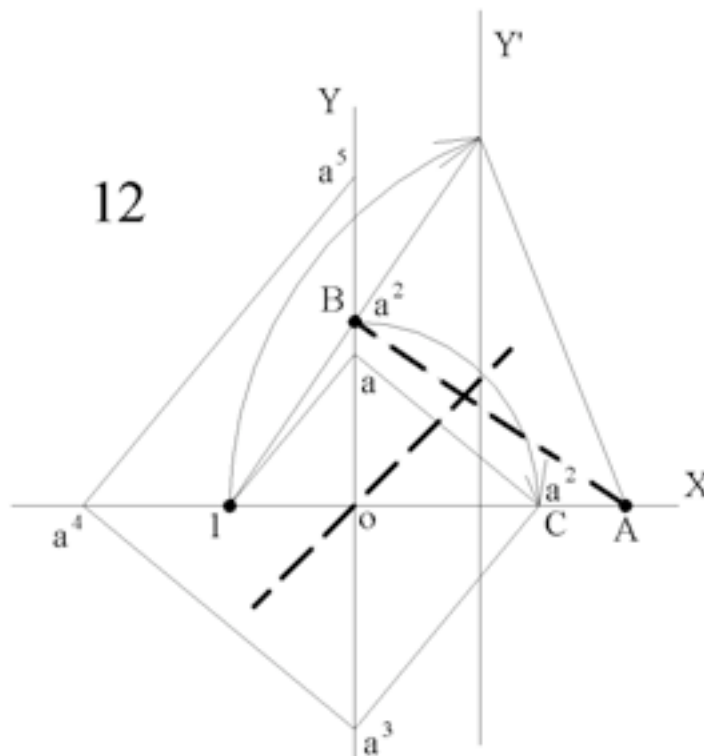
$$OC^3 = OB \quad ; \quad OC = \sqrt[3]{OB}$$



RAÍZ CUARTA

Supongamos, Fig. 12, disponible la espiral ortogonal $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \dots$ y que deseamos hallar la raíz cuarta de a^4 . El proceso de plegado sería el siguiente:

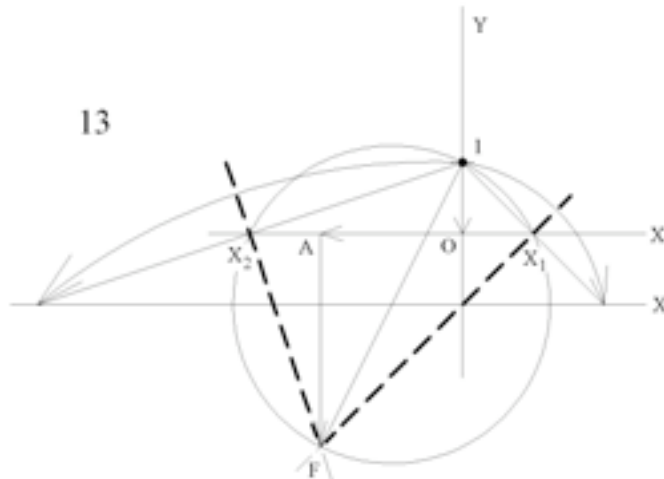
- * Obtener A simétrico de a^4 respecto del eje Y.
- * Obtener Y' paralela a Y de forma que disten la unidad entre sí.
- * Plegar **simultáneamente** 1 sobre Y' y A sobre sí mismo. Se obtiene la cicatriz de plegado AB de forma que $OB = a^2$ como se deduce del $\Delta 1BA$.
- * Plegar el eje Y sobre el X produciendo como línea de plegado la bisectriz del primer cuadrante. Así se llevará B sobre C obteniendo $OC = a^2$.
- * Obtenido C (a^2), seguir lo indicado en la Fig. 7 para conseguir $oa = a$ sobre el eje de ordenadas.



RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Vamos, en primer lugar, a dar forma a la ecuación de segundo grado con raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$.

$$(x - 1)(x + 3) = 0 \quad ; \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (1)$$



La Fig. 13 muestra el proceso de plegado para obtener sus dos raíces:

* Fijar los ejes coordenados OX ; OY .

* Dibujar la recta X' distante de OX tanto como I (el punto Inicial que dista del origen la unidad, puesto que el coeficiente de mayor grado -el segundo grado- es 1).

* Iniciar en I ($IO = 1$) la serie de vectores coeficiente con los siguientes criterios:

$IO = 1$: coeficiente de x^2 .

$OA = 2$: valor absoluto del coeficiente de x ; formando ángulo recto con IO ; orientado a la derecha (según el avance de los vectores) porque del primero al segundo coeficiente no hay cambio de signo.

$AF = 3$: valor absoluto del término independiente; en ángulo recto con OA ; con sentido a la izquierda porque al pasar del 2º al tercer término hay cambio de signo. Así se obtiene el punto final **F** de los vectores acumulados.

* Producir el plegado que con punto doble en **F** lleve **I** sobre la recta X' : $F \rightarrow F$; $I \rightarrow X'$.

Como se ve, hay dos soluciones:

$$OX_1 = 1 \quad ; \quad OX_2 = - 3$$

Justificación:

Tanto los ΔIOX_1 ; ΔFAX_1 como ΔIOX_2 ; ΔFAX_2 son semejantes. Así pues:

$$\frac{IO}{OX_1} = \frac{AX_1}{AF} \quad ; \quad \frac{IO}{OX_2} = \frac{AX_2}{AF}$$

Para asignar valores a esos segmentos hay que tener en cuenta:

A la variable independiente x hay que asignarle el signo que le corresponda en el plano cartesiano.

A los demás segmentos se les asignará el valor absoluto que tienen en la ecuación (1), ya que su signo se tuvo en cuenta a la hora de girarlo a la derecha o a la izquierda: estos segmentos (los coefi-

cientes de la ecuación) no tienen dimensión de variable independiente aunque estén superpuestos a ella en el plano cartesiano.

Entonces queda:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + 2}{3} \quad ; \quad \frac{1}{-x_2} = \frac{-x_2 - 2}{3}$$

que en ambos casos conduce al mismo resultado si se generaliza x_1 ; x_2 a x .

Veamos otro ejemplo para dejar bien asentada la sistemática de signos.

Sea la ecuación de segundo grado con raíces $x_1 = -1$; $x_2 = -3$

$$(x+1)(x+3) = 0 \quad ; \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (2)$$

* Valores absolutos:

IO = 1: coeficiente de x^2 .

OA = 4: coeficiente de x .

AF = 3: término independiente.

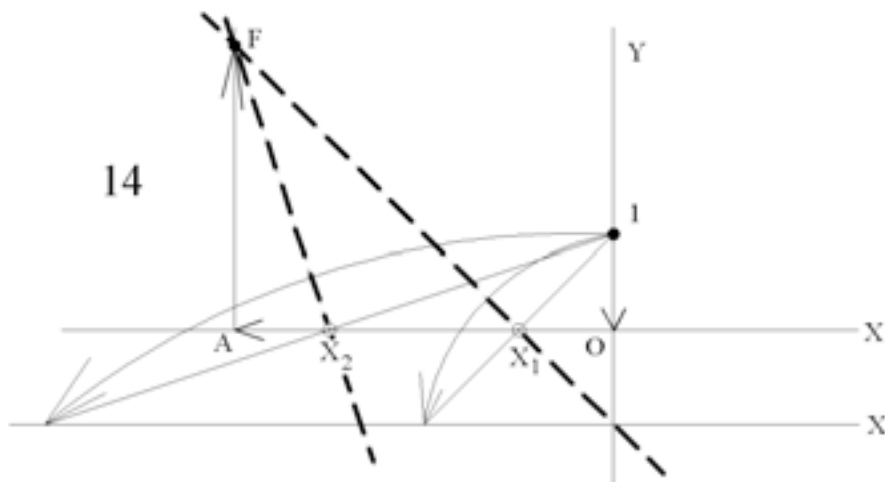
* Secuencia de vectores: IOAF [girando siempre a la derecha porque en (2) no hay cambios de signo].

* Plegado: $I \rightarrow X'$; $F \rightarrow F$.

* Las raíces resultan ser: $Ox_1 = -1$; $Ox_2 = -3$

$\Delta IOx_1 \sim \Delta FAx_1$; $\Delta IOx_2 \sim \Delta Ax_2F$ luego:

$$\frac{IO}{Ox_1} = \frac{Ax_1}{AF} \quad ; \quad \frac{IO}{Ox_2} = \frac{Ax_2}{AF}$$



$$\frac{1}{-x_1} = \frac{4 - (-x_1)}{3} \quad ; \quad \frac{1}{-x_2} = \frac{4 - (-x_2)}{3}$$

Generalizando para ambos casos: $x^2 + 4x + 3 = 0$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN COMPLETA DE TERCER GRADO

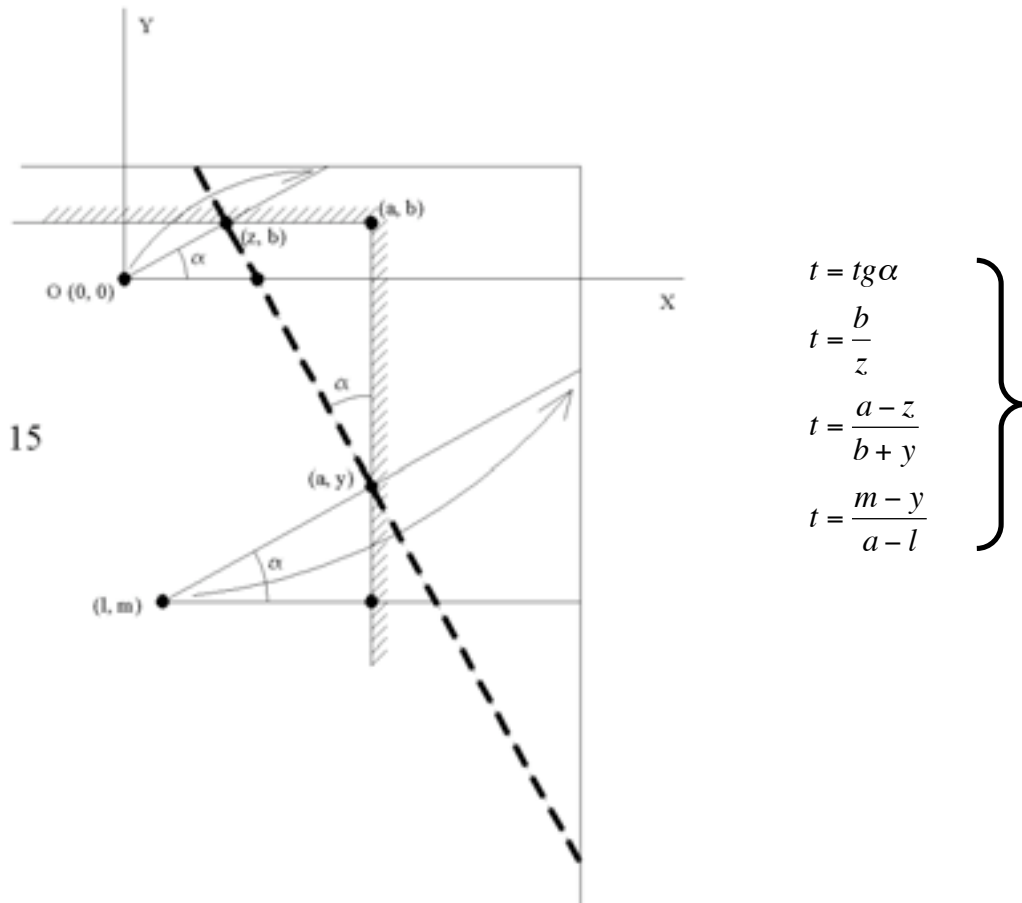
Antes de nada, vamos a fijarnos en la Fig. 6 para mostrar cómo en su configuración subyace la ecuación de tercer grado. Esa figura se completa ahora con la siguiente Fig. 15 de la que se deducen los valores de t que se muestran a su derecha (tomados valores absolutos).

Vamos a obtener una expresión en t dependiente sólo de las coordenadas de las bolas $(0, 0)$; (l, m) , del ángulo de ataque α (cuya tangente es t), y de la relación mesa-bolas (a, b) :

$$bt + ty = a - \frac{b}{t} \quad ; \quad \frac{at - b - bt^2}{t^2} = m - at + lt$$

$$(l - a)t^3 + (m + b)t^2 - at + b = 0$$

Es decir, la orientación que ha de darse a la bola situada en el origen para que de en la bola situada en (l, m) después de rebotar ortogonalmente sobre ambas bandas, es la raíz real única de la ecuación de tercer grado que hemos obtenido. Ello se debe a que, para las dimensiones representadas en el dibujo, la ecuación tiene su discriminante positivo.

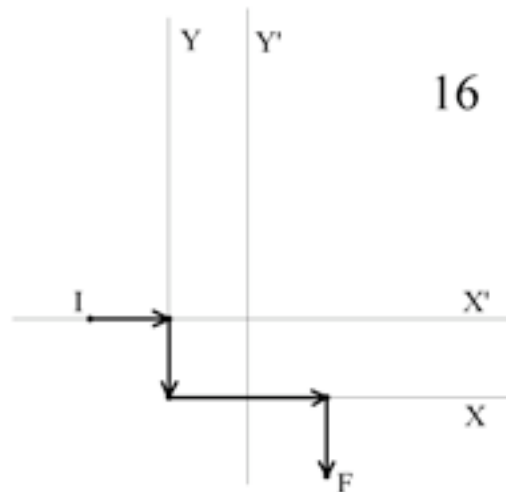


Es importante insistir en que las dos rectas receptoras en el plegado **simultáneo** de los puntos Inicio (0, 0) y Fin (1, m) están situadas respecto de las bandas (donde se produce la incidencia de la bola activa) a la misma distancia a que se encuentran de ellas dichos puntos.

Vamos ya a obtener las tres raíces de una ecuación completa de tercer grado. La expresión está pensada para que su resolución por plegados *quepa* dentro del papel. Será ésta:

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

La secuencia de vectores, según coeficientes, será: 1; 1; -2; -1 (Fig. 16).



El primer vector con Inicio en I (y valor 1 como el coeficiente de t^3) *incide sobre la banda Y* de manera que exige la línea Y' para que sobre ella se asiente I en el plegado final.

El segundo vector (valor 1 como el coeficiente de t^2) se produce girando a la derecha al finalizar el primer vector (no ha habido cambio de signo al pasar del primero al segundo término de la ecuación).

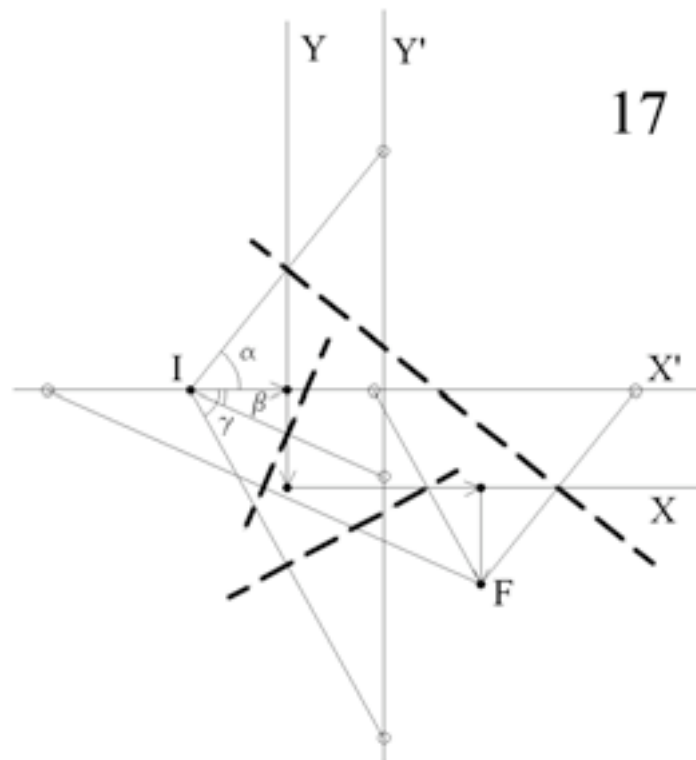
El tercer vector acusa un giro a la izquierda (hay cambio de signo en el paso del segundo al tercer término de la ecuación) y tiene valor 2, como el coeficiente del tercer término en t .

Como al pasar del tercero al cuarto término de la ecuación no hay cambio de signo, el giro es a la derecha para producir el último vector (valor 1, el del término independiente) que termina en F, el punto Final.

Este último vector *viene rebotado de la banda x* y exige, por tanto, la línea X' para asentar sobre ella F en el plegado ulterior. Así pues, habrá de hacerse el siguiente plegado **simultáneo**:

$$I \rightarrow Y' \quad ; \quad F \rightarrow X'$$

Lo que ocurre es que este plegado puede hacerse de tres formas distintas dando lugar a la Fig. 17.



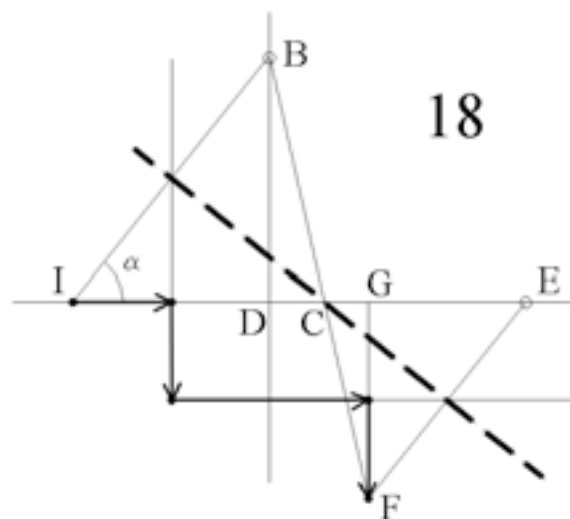
En ella, las líneas de trazo representan los plegados en valle, y los ángulos α , β y γ conducen a las soluciones de la ecuación.

$$\alpha = 51,2721^\circ \quad \beta = - 23,9909 \quad \gamma = - 60,9719$$

$$t_1 = \text{tg } \alpha = 1,2469 \quad t_2 = \text{tg } \beta = - 0,4450 \quad t_3 = \text{tg } \gamma = - 1,8019$$

cualquiera de ellas satisface la ecuación $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$

Justificación de que la Fig. 17 se asocia a la ecuación de tercer grado propuesta (Fig 18):



En los $\triangle IBD$; $\triangle EGF$ que son semejantes, se tiene:

$$\frac{BD}{ID} = \frac{FG}{GE} \quad ; \quad \frac{BD}{2} = \frac{2}{ED-1} \quad (1)$$

En los $\triangle IBC$; $\triangle CEF$, también semejantes:

$$\frac{EC}{GF} = \frac{IC}{BD} \quad ; \quad \frac{ED-CD}{2} = \frac{2+CD}{BD} \quad (2)$$

Igualando $\frac{BD}{2}$ en (1) y (2):

$$\frac{2}{ED-1} = \frac{2+CD}{ED-CD} \quad ; \quad CD = \frac{2}{ED+1} \quad (3)$$

En el $\triangle IBC$ se tiene también (al ser $t = \tan \alpha$):

$$BD = ID \tan \alpha = 2t \quad ; \quad \text{Ang. BCI} = 180 - 2\alpha \quad ; \quad BD = DC \tan (180 - \alpha)$$

Luego:

$$2t = -DC \tan 2\alpha = \frac{2DC \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - 1} \quad ; \quad t^2 - 1 = DC \quad (4)$$

En el $\triangle EGF$, Ang. FEG = α , luego:

$$t = \frac{GF}{GE} \quad ; \quad t = \frac{2}{ED-1} \quad (5)$$

Las expresiones (3), (4), (5) constituyen un sistema paramétrico en t que permite obtener la ecuación de tercer grado que buscamos.

$$\left. \begin{aligned} t^2 - 1 &= \frac{2}{ED+1} \quad ; \quad ED+1 = \frac{2}{t^2-1} \\ ED-1 &= \frac{2}{t} \end{aligned} \right\}$$

$$2 = \frac{2}{t^2-1} - \frac{2}{t} \quad ; \quad (t^2-1)t = t - (t^2-1)$$

$$(t^2-1)(t+1) = t \quad ; \quad t^3 - t + t^2 - 1 = t$$

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

Jesús de la Peña

12-2-10