ProbViviani

El teorema de Viviani se enuncia así:

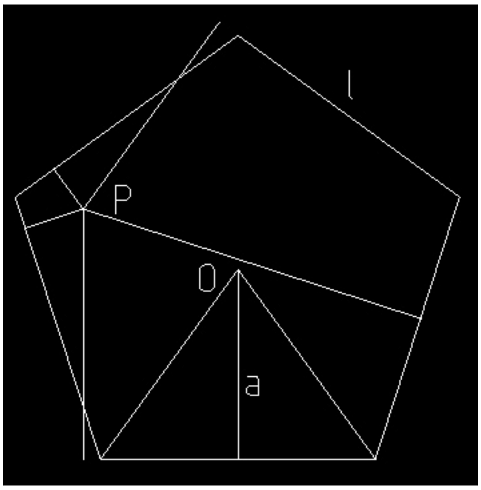
“Dado un punto cualquiera en el interior de un triángulo equilátero y trazando desde él las perpendiculares a sus lados, resulta que la suma de esas tres distancias es igual a la altura del triángulo”.

Veamos la generalización del teorema, adaptándolo, a cualquier polígono regular. Como es fácil expresarla para polígonos regulares de número par de lados, vamos a aplicarla a un pentágono regular. El enunciado quedaría así:

“Dado un punto cualquiera en el interior de un pentágono regular convexo y trazando desde él las perpendiculares a sus lados, resulta que la suma de esas cinco distancias es igual a la suma de cinco apotemas del pentágono”.

SOLUCIÓN

Hay que empezar recordando que la altura de un triángulo equilátero mide tanto como tres apotemas.



La figura muestra un pentágono de centro O, lado l y apotema a, con un punto interior P desde el que están trazadas las perpendiculares a los cinco lados.

Podemos triangular el pentágono con sus lados como base, sus vértices en P y alturas representadas por las normales mostradas en la figura que llamaremos, respectivamente a_i (para valores de i de 1 a 5).

Asimismo podemos triangularlo, también, con sus lados como base, sus vértices en O y altura igual a la apotema a.

Siendo el área del pentágono igual a la suma de los cinco triángulos obtenidos, tanto en un caso como en el otro, resultará:

$$5\,[(1/2)\ l \times a] = \sum_{i=1}^{5}[(1/2)\ l \times a_i] = (1/2)\ l \sum_{i=1}^{5} a_i$$

$$5\,a = \sum_{i=1}^{5} a_i$$

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández