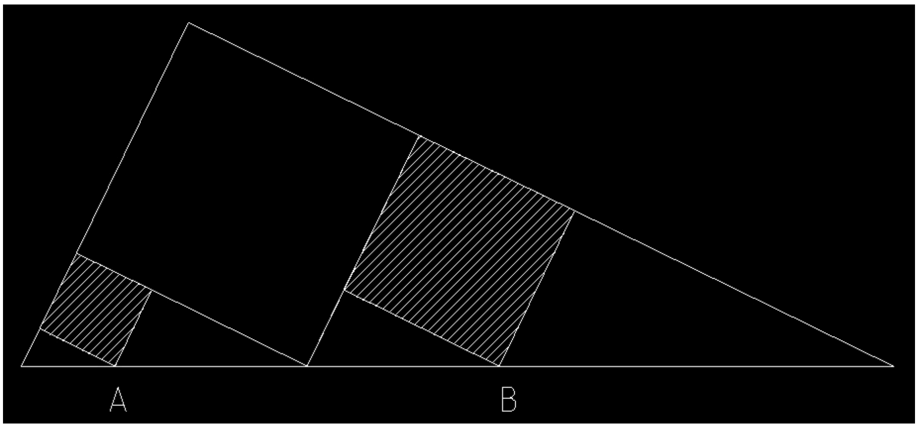
ProbSintrampa

Sabiendo que, según la Fig. 1, el segmento AB mide 8, se pide determinar el valor conjunto de las áreas sombreadas.

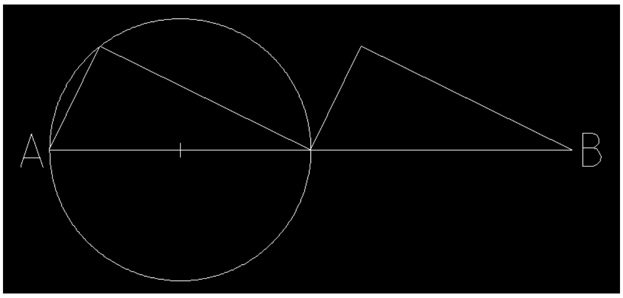
Fig. 1



SOLUCIÓN

El lector duda perplejo que con tan poca información se pueda obtener un resultado. La apariencia de la figura es contundente; sin embargo se recela la ocultación de un trampantojo, como ocurre en otros casos. El enunciado, ni siquiera llama cuadrados a los que aparentemente deben constituir las llamadas áreas rayadas.

Por todo ello, lo mejor es intentar construir la figura desde el precario AB = 8. En el enunciado original el valor 8 no era tal, sino 6. Yo he cambiado a 8 por comodidad constructiva. El proceso que seguiré supone que no hay trampantojo, sino que lo que se aparenta es real.



En la Fig. 2 se ha construido, a la izquierda, un triángulo rectángulo cualquiera que luego se copia a su derecha.

Fig. 2

La Fig. 3 se apoya en el triángulo a la izquierda de la 2. Se lleva su cateto menor a continuación del mayor y con el conjunto de ambos se obtiene el lado del cuadrado grande (el del centro de la Fig. 1).

La Fig. 4 es la 3 clarificada.

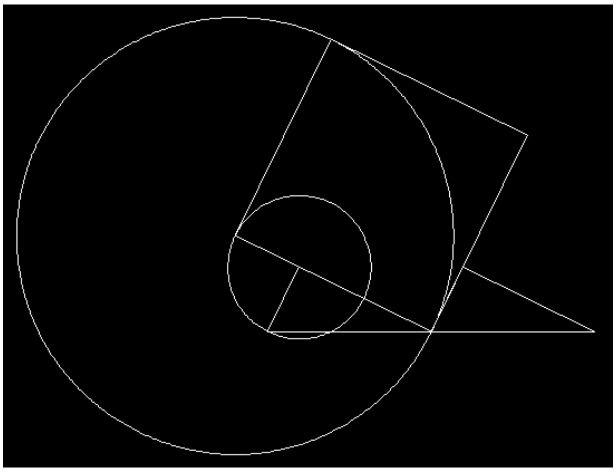
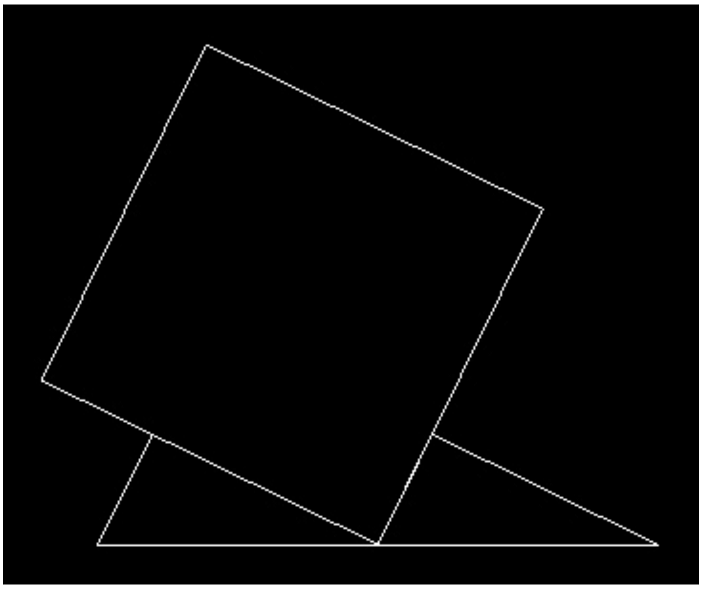


Fig. 3



De la Fig. 4 se pasa a la 5 alargando los lados superiores del cuadrado grande hasta cortar al segmento AB asimismo alargado.

Para pasar de la 5 a la 1 solo queda: recortarla y añadir los dos lados que faltan a los dos cuadrados que después hay que sombrear.

Observar en la Fig. 1 que la recta que une el punto medio de AB con el vértice superior del gran triángulo, es la bisectriz de su ángulo recto.

Fig. 4

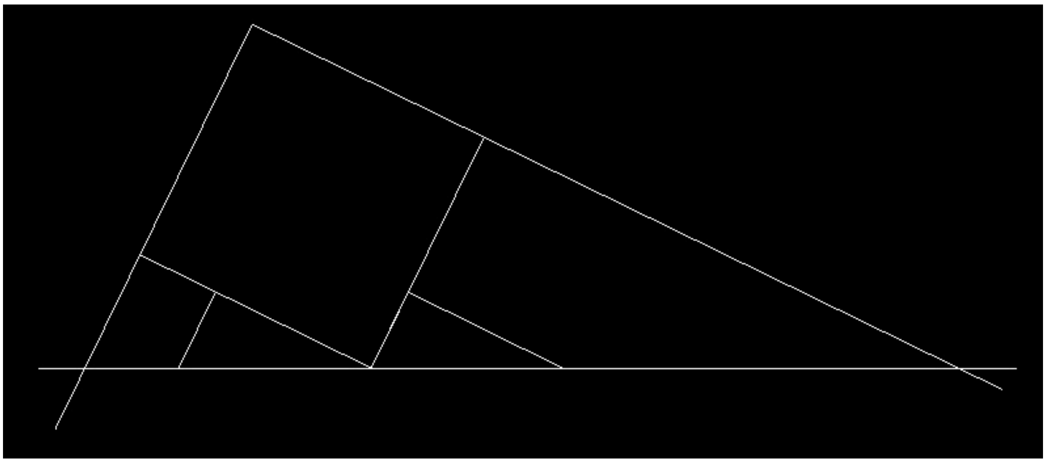


Fig. 5

Ahora estamos en condiciones de describir adecuadamente la Fig. 1. En ella hay 5 triángulos rectángulos semejantes: el envolvente, los dos extremos que resultan irrelevantes y los dos centrales. Estos, son congruentes (uno igual al otro por traslación); tienen sus hipotenusas de longitud 4 sobre la hipotenusa del triángulo envolvente, y un vértice común.

Hay además tres cuadrados: uno grande central y dos sombreados; los lados de estos miden respectivamente, igual que cada cateto de los congruentes. El lado del cuadrado central mide la suma de los catetos de estos últimos.

En la descripción de la Fig. 2 se dice que "se ha construido, a la izquierda, un triángulo rectángulo cualquiera". En sentido estricto no es así: ese triángulo tiene una hipotenusa que mide 4 y un cateto que mide menos de $2\sqrt{2}$, a fin de que el triángulo no resulte isósceles.

Ya podemos ver claro lo que pasa en la Fig. 1: Se tendrá, por el teorema de Pitágoras que

$$(AB / 2)^2 = \text{la suma de los cuadrados de los catetos.}$$

Es decir

$$(8 / 2)^2 = 16 = \text{la suma de las dos áreas sombreadas.}$$

O sea,

8 unidades lineales dan lugar a 16 unidades cuadradas.

VARIANTE 1

Al mismo resultado se llega de haber hecho isósceles los dos primeros triángulos, pero la imagen conseguida sería la de la Fig. 6. El área sumada de los dos cuadrados sombreados, también es 16.

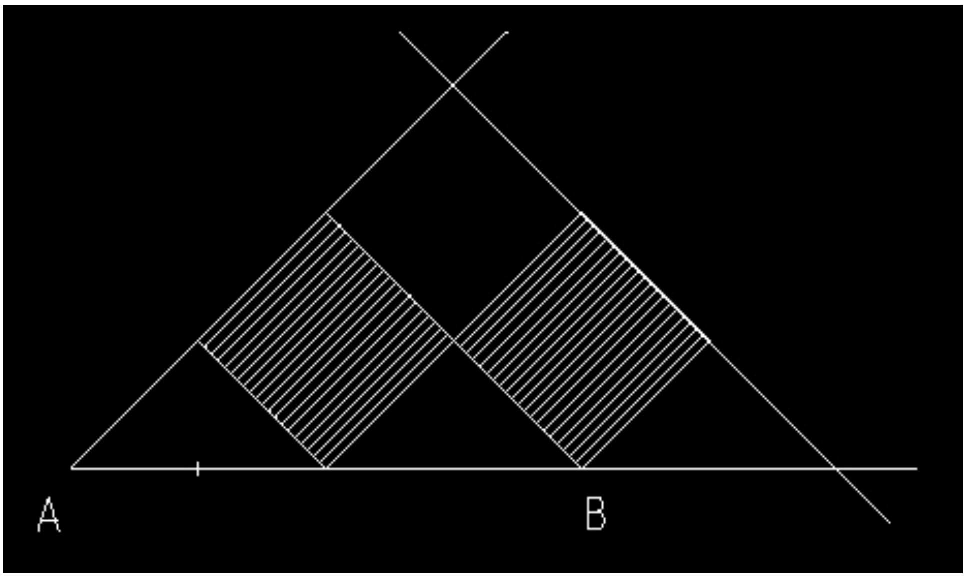


Fig. 6

VARIANTE 2

En la Fig. 1 se puede apreciar que los tres cuadrados son tales gracias a que el punto medio de AB está en la intersección de la hipotenusa grande con la bisectriz del ángulo recto del triángulo envolvente (bisectriz no dibujada).

Veamos ahora el problema cuando AB se desliza hacia la derecha, tal como se ve en la Fig. 7, arrastrando con ella a los dos triángulos congruentes. ¿Cuánto valdrá entonces la suma de las áreas sombreadas?

Pues resulta que vale lo mismo que antes:

8 unidades lineales dan lugar a 16 unidades *rectangulares*.

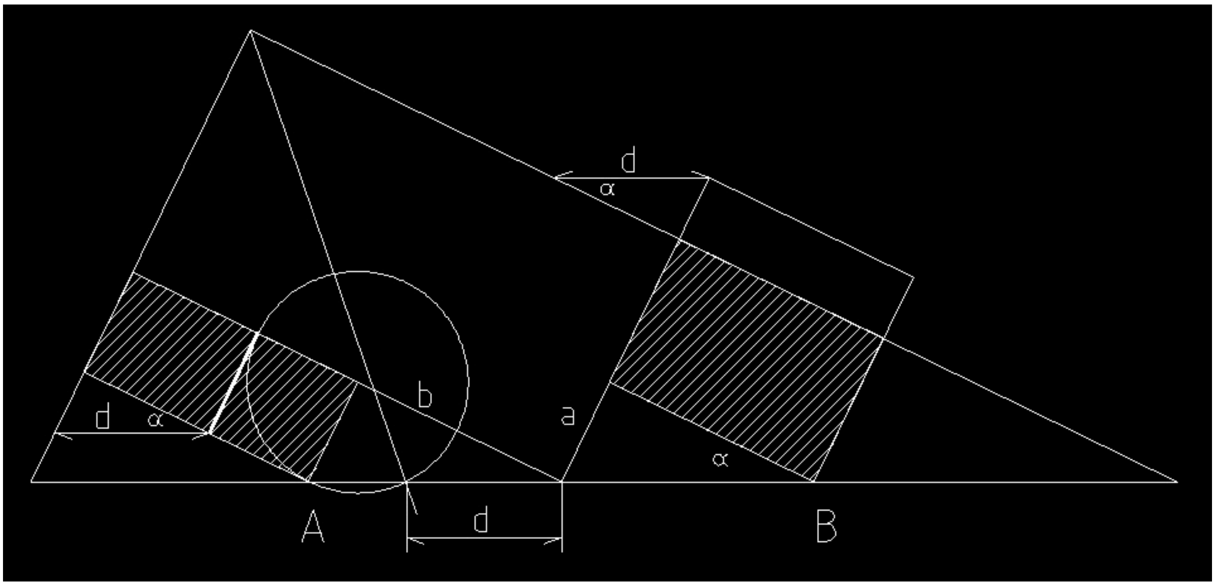


Fig. 7

Analicemos la Fig. 7. Es como si todo lo dibujado en el interior del gran triángulo de la Fig. 1 más las letras A y B se hubiera desplazado hacia la derecha una cantidad d. Ese desplazamiento queda anotado para el vértice común de los triángulos congruentes que coincide con la intersección de la bisectriz del ángulo recto superior con la gran hipotenusa, y también para el vértice izquierdo del cuadrado pequeño, así como para el vértice superior del cuadrado grande.

El resultado es que el cuadrado grande se reduce hasta convertirse en el rectángulo sombreado, y el cuadrado pequeño aumenta su área hasta convertirse en otro rectángulo también sombreado.

Valor de las áreas transformadas siendo a y b los catetos de los triángulos congruentes.

El rectángulo restado al cuadrado grande (no sombreado) tiene de lados b y d sen α. Su área es

$$b\ d \operatorname{sen} \alpha$$

El rectángulo añadido al cuadrado pequeño tiene de lados a y d cos α. Su área es

$$a\ d \cos \alpha$$

Como b sen α = a cos α = altura de un triángulo congruente, resulta que las áreas restada y sumada a las de los cuadrados de la fig. 1 son iguales. Por consiguiente la suma de las áreas rectangulares sombreadas en la Fig. 8 es la misma que las sombreadas en la Fig. 1, es decir igual al cuadrado de la hipotenusa de un rectángulo congruente (también sombreado en la Fig. 8).

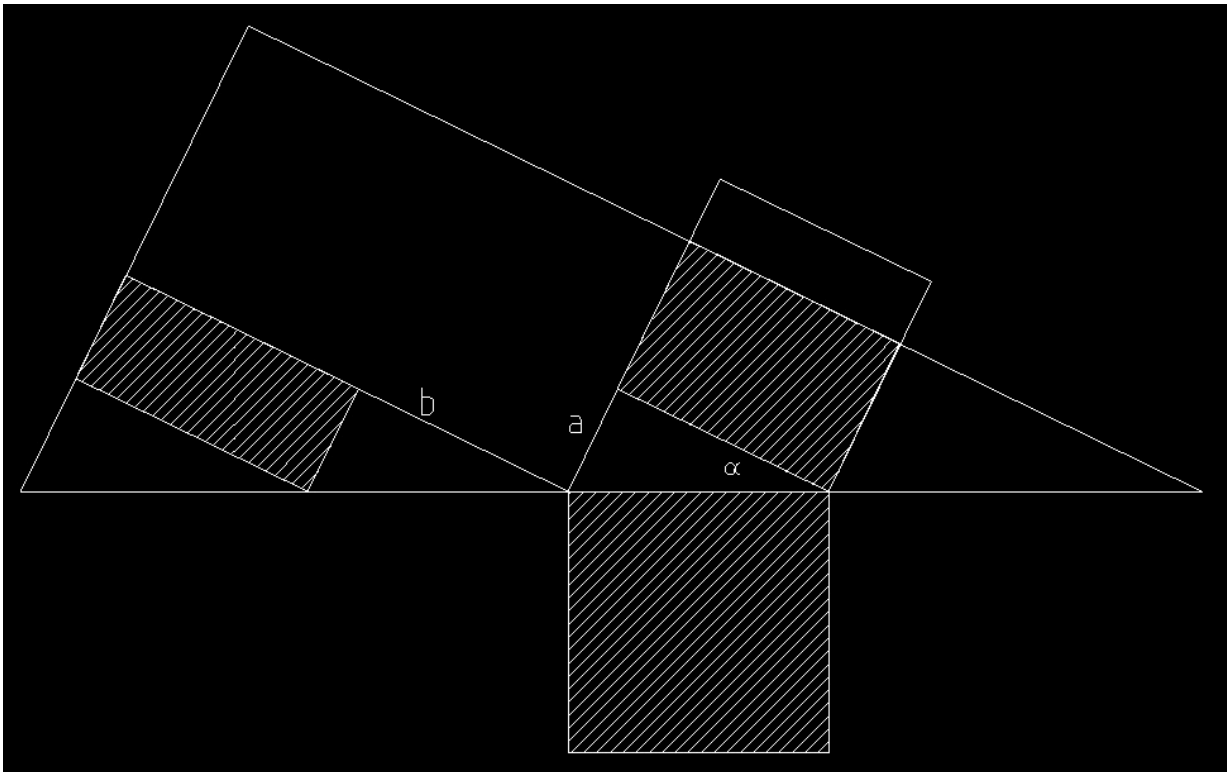


Fig. 8

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández