CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández

ProbSerie

En mis lecturas (dice mi amigo Mariano) tropiezo con esta suma de infinitos términos. Tal vez te apetezca tratar de resolverla como hizo Leibniz.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 + 1/28 + 1/36 + ….. + 1/45 + 1/55 + 1/66 + 1/78 + 1/91 + 1/105 + 1/120

El denominador de la fracción enésima es la suma de los primeros *n* números enteros.

S_8 = 1,77777 S_{15} = 1,875

SOLUCIÓN

Suma de los términos de una progresión aritmética de razón 1 = $[(t_1 + t_n) / 2]\, n$

Término general de la serie propuesta.

$$\ldots + \frac{2}{(t_1 + t_n)n} + \cdots$$

que conduce a $\ldots + \frac{2}{(1+7)7} + \cdots$ 1 / 28 para el término 7º.

Es decir, el término general es 2 / [(1 + n) n]

Sea la serie $\Sigma \frac{2}{(1+n)n}$

Descomposición del término general:

$$\frac{2}{(1+n)n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$2 = A(n+1) + Bn$$

para n = 0 > A = 2

para n = -1 > B = -2

Como la serie es convergente (sus términos decrecen continuamente), su término general tiende a cero.

$$\frac{2}{(1+n)n} = \frac{2}{n} + \frac{-2}{n+1}$$

Para n = 1, 2, 3 … tenemos:

n = 1 $\frac{2}{1} + \frac{-2}{2}$

n = 2 $\frac{2}{2} + \frac{-2}{3}$

n = 3 $\frac{2}{3} + \frac{-2}{4}$

n = 4 $\frac{2}{4} + \frac{-2}{5}$

……………………………

Sumando por columnas, queda que la suma S = 2

Yo no sabía cómo Leibnitz había resuelto el problema. Me limité a seguir las enseñanzas de mi antiguo libro de Cálculo. Mariano me manda *la solución Leibnitz* que es una maravilla:

LEIBNITZ y HUYGENS

Esta serie infinita **S**, en que el denominador de la **fracción enésima** es la **suma** de los primeros **n** números enteros, se la propuso el matemático holandés Christian **Huygens** a Gottfried Wilhelm **Leibnitz**. Este le demostró que el valor de **S** es **2** de esta sencilla y elegante manera.

S = 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 + 1/28 + 1/36 + … =

= 2 (1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + 1/42 + 1/56 + …)

Luego, expresando cada función dentro del paréntesis como una diferencia entre otras dos, la serie se transforma así:

S = 2[(1- ½) + (1/2 – 1/3) + (1/3 – ¼) + (1/4 – 1/5) + (1/5 – 1/6) + …] = 2x1

Luego **S = 2**.