Hurgando en cosas antiguas tropiezo con un problema que me plantearon hace tiempo y que tenía olvidado. Se enunciaba así:

Dado un punto P, un ángulo A y un segmento a, trazar por P una recta que corte a A de forma que sus lados determinen en la recta el segmento a.

SOLUCIÓN

Para mayor facilidad busco la solución para A = 90º (Fig. 1):
1.-Hago que los lados de A midan a. Y que el punto P esté en la región convexa del ángulo A.
2.-Divido el lado horizontal de A en n partes iguales.
3.-Asiento el segmento a en cada punto de partición horizontal para dejarlo descansar sobre el lado vertical de A. Es como apoyar en el suelo y en la pared una escalera de mano fija, para distintas posiciones en altura.
4.-Así tengo n segmentos a entrecruzados.
5.-Trazo la curva spline por los puntos medios de los subsegmentos de entrecruzamiento.
6.- Desde P trazo la tangente a la curva obtenida. El segmento que en esa tangente determinan los lados de A, medirá a.

La exactitud de esa medida depende de la cantidad n de segmentos entrecruzados que hayamos manejado. Cuando n > ∞ la solución es perfecta.

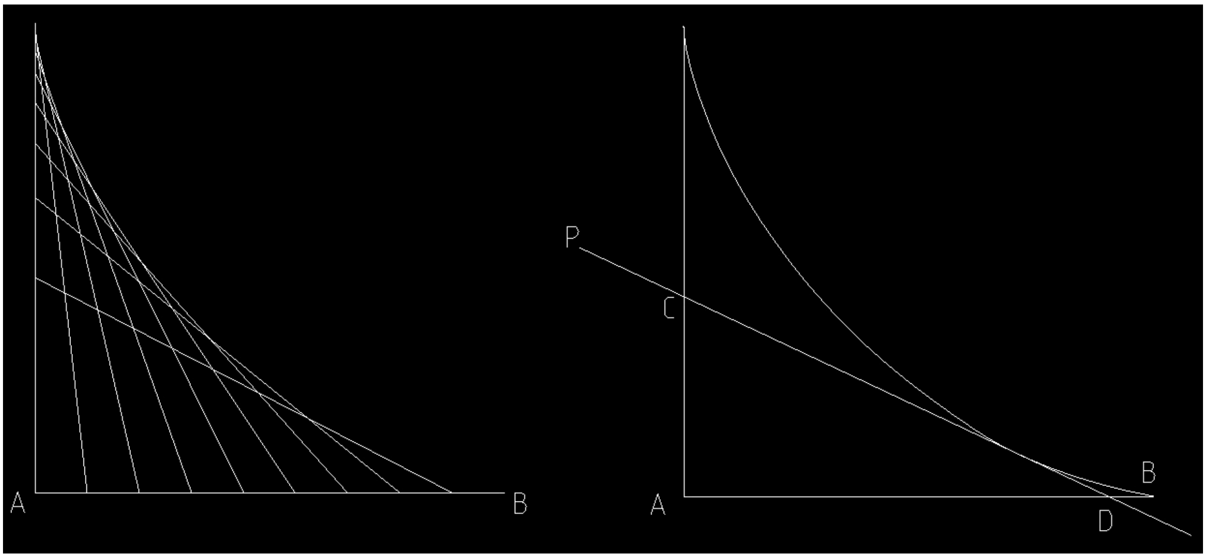
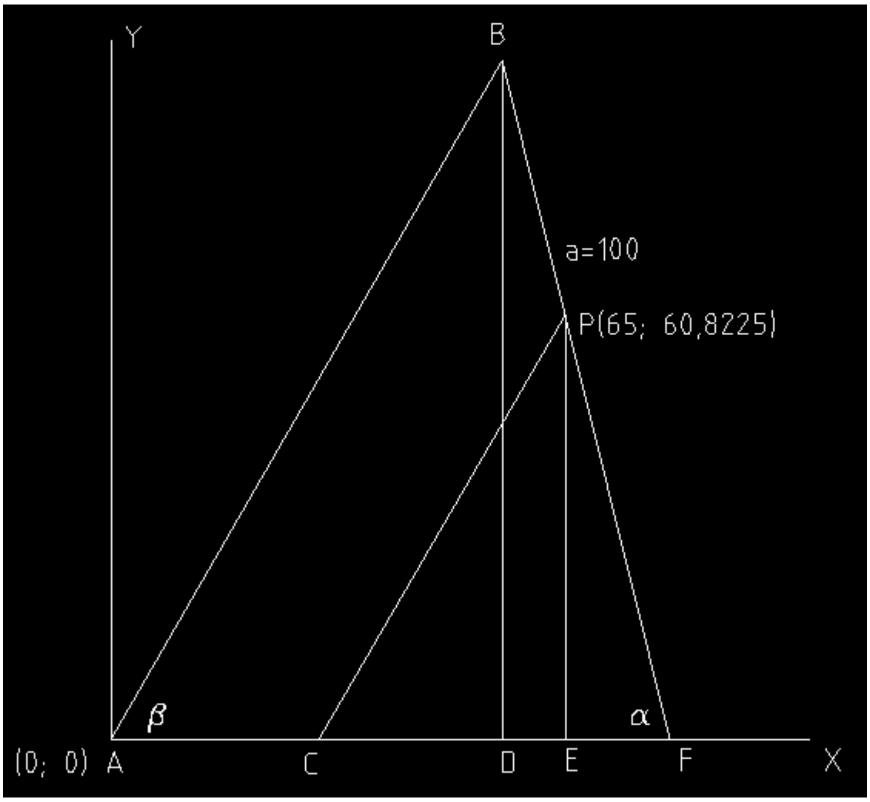


Fig. 1

La Fig. 1 muestra la construcción, y cómo CD = AB = a

La solución es buena para ángulos rectos y obtusos y, siempre que P esté en la región convexa de A. Para ángulos A agudos la solución es algo problemática. Por eso he buscado otra solución que es válida para los tres tipos de ángulos y, para cuando P está, indistintamente, en la región convexa o cóncava de A. La muestro a continuación en la Fig. 2 para el caso de un ángulo A agudo y P en su región cóncava.

Es condición necesaria que la circunferencia con centro en P y diámetro a corte a ambos lados del ángulo.



En la Fig. 2 el ángulo A mide β = 60º. Su vértice A se sitúa en el origen de coordenadas (0; 0). Su lado horizontal es AX = a. P está situado en las coordenadas (b; c) que se indican.

Se trata de hacer pasar por P una recta (la solución es BF) que determine entre los lados AB y AX un segmento que mida a.

La incógnita es el ángulo α que indica la inclinación de la recta buscada que ha de pasar por P.

Fig. 2

Los datos de partida son:
1 > (x = sen α) > 0
a = 100
b = 65
c = 60,8225
tan β = tg 60 = 1,732

Como se ve, los triángulos ABD y CPE son semejantes (se ha trazado PC paralela a BA). Para encontrar la ecuación que resuelva la incógnita x hay que introducir todos los datos en la relación de semejanza porque si no, damos lugar a tautologías estériles.

$$\frac{BD}{AD} = \frac{PE}{CE}$$

$BD = a\ \sin\alpha$

$AD = AE - DE = b - \cos\alpha\left(a - \frac{c}{\sin\alpha}\right)$

PE = c

$CE = \frac{c}{\tan\beta}$

$$\frac{a\ \sin\alpha}{b - \cos\alpha\left(a - \frac{c}{\sin\alpha}\right)} = \frac{c\tan\beta}{c} = \tan\beta$$

$$1{,}732 = \frac{100x}{65 - \sqrt{(1-x^2)}\left(100 - \frac{60{,}8225}{x}\right)}$$

Como se ve, esta ecuación en x es un tanto complicada, pero si recordamos que 1 > (x = sen α) > 0, veremos que con un elemental tanteo horquillatorio, podemos hallar la solución. Por supuesto, se puede resolver mediante un programa de cálculo con la resolución que se precise.

Probemos con x= 0,5. Resulta que para tan β = tg 60 = 1,732, en vez de ese valor obtenemos 0,597. Hay que aumentar el valor de x. Intentamos con x = 0,8. Ahora el resultado para tan β es 1,58: hay que aumentar x un poco más; probamos con x = 0,9: llegamos a que ahora tan β resulta 1,769; bajemos a x = 0,88; obtenemos tan β = 1,7484; bajemos a x = 0,86 para obtener tan β = 1,7179.

Dando por bueno que tan β = 1,72 frente a 1,73, resultará que α = arc sen 0,88 = 61,6424º

Pero, ¡atención! El α que acabamos de obtener no es el de la Fig. 2 que mide 76,15º, sino el α1 de la Fig. 3 que sí mide 61,6424º.

Para α = 76,15º, es x= sen 76,15º = 0,97 que satisface a la ecuación planteada; ecuación que, como se ve, tiene dos raíces.

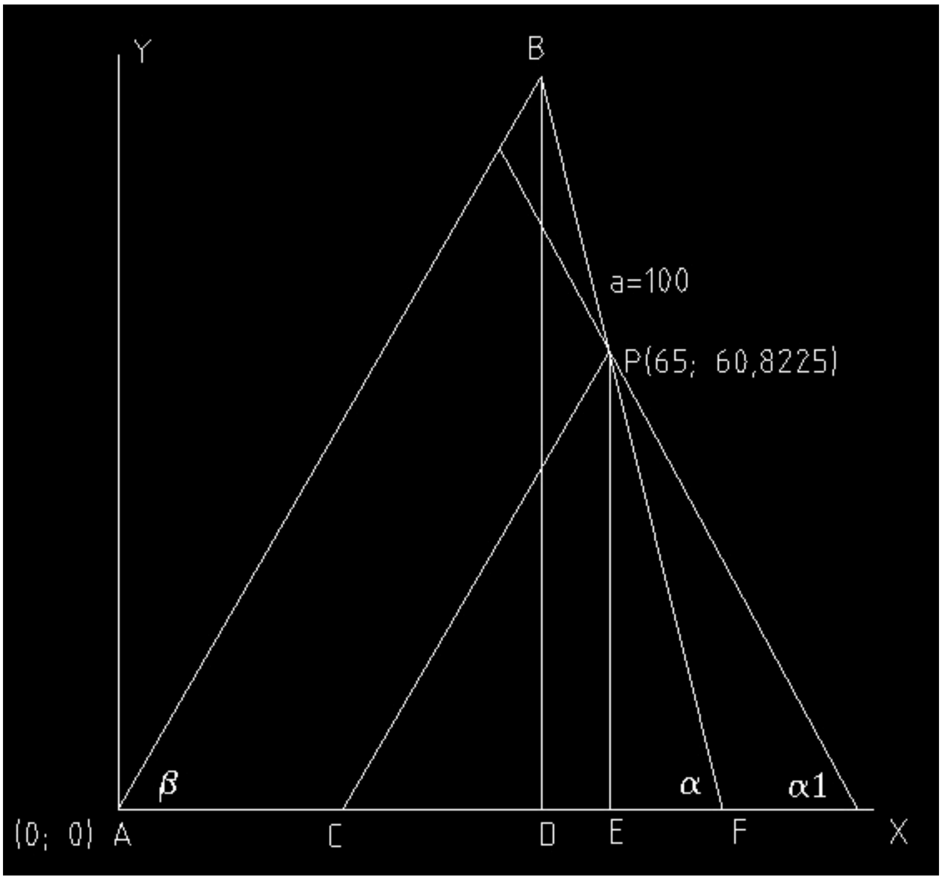


Fig. 3

Es decir, la solución tiene dos variantes para la inclinación de a por P: α = 76,15º y α1 = 61,6424º.