ProbPotencia

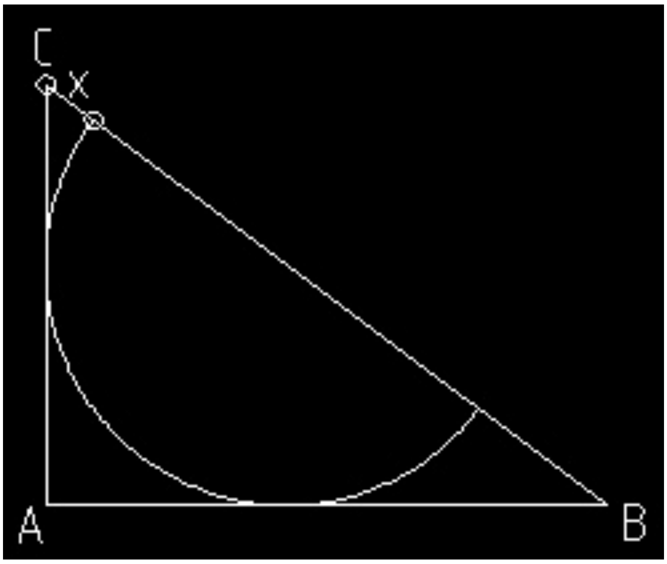


Fig. 1

En la Fig. 1 tenemos el triángulo rectángulo ABC de hipotenusa 5 y catetos AB = 4 y AC = 3. Con centro en la hipotenusa se traza la semicircunferencia tangente a ambos catetos que determina el segmento x cuya medida se pide.

SOLUCIÓN potencia.

El centro de la circunferencia O será el punto de intersección de la hipotenusa con la bisectriz del ángulo recto A (Fig. 2). Su radio será r = DO = OE.

La potencia de C respecto de la circunferencia será = CF × CG = $CD^2 = (3 - r)^2$.

$x (2r + x) = (3 - r)^2$

$2rx + x^2 = 9 + r^2 - 6r$

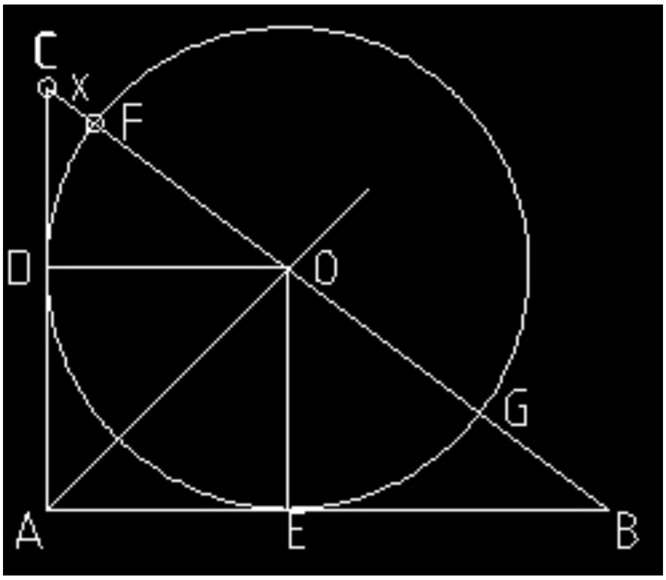


Fig. 2

Comparando los triángulos semejantes CDO y ABC se tiene

$r / 4 = (r + x) / 5$

(***) $r = 4 x$

Sustituyendo:

$8 x^2 + x^2 = 9 + 16 x^2 - 24x$

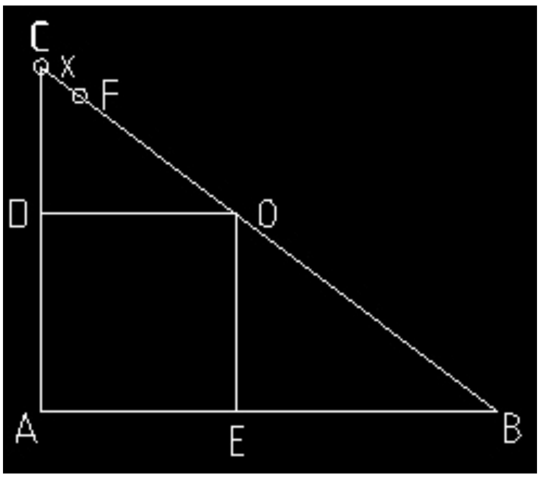
$7 x^2 - 24 x + 9 = 0$

$x = (24 \pm 18) / 14 = 0{,}4285$

OTRA SOLUCIÓN

De la Fig.2 extraemos la 3 para comparar los triángulos ABC y OEB:

Fig. 3



OE / CA = EB / AB

$r / 3 = (4 - r) / 4$

$r = 12 / 7 = 1{,}7143$

Si ahora comparamos ABC y CDO, tendremos:

DO / AB = OC / BC

r / 4 = (r + x) / 5

5 r = 4r + 4x

x = r / 4 = 1,7143 / 4 = 0,4286

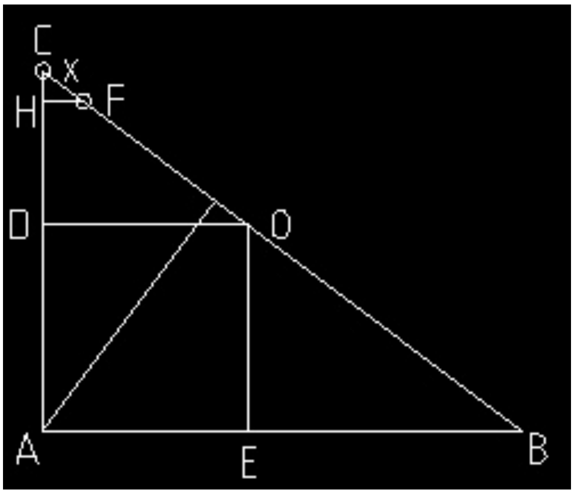


Fig. 4

Y UNA PROPINA

Si en la Fig. 3 añadimos el pequeño segmento horizontal HF y la perpendicular a CB desde A obtenemos en la Fig. 4 dos triángulos rectángulos pequeñitos, el CHF y el otro con un vértice en O.

Salta a la vista que ambos son semejantes entre sí y con respecto a ABC. Pero lo que no resulta evidente es que, además, sean iguales. CAD mide sus lados y da fe de que los homólogos lo son.

Para demostrarlo, vamos a olvidar de la Fig. 4, que hemos llamado X al segmento CF. Así tendremos la Fig. 5. A continuación estableceremos el sistema de ejes coordenados de centro en A para abscisas sobre AB y ordenadas sobre AC.

Hallaremos las ecuaciones de las rectas AG y DO para conseguir las coordenada de su intersección en J.

Los triángulos ABC y AJK son semejantes porque son rectángulos con sus hipotenusas perpendiculares; sus catetos mayores también son perpendiculares. Así tendremos

JK / AK = AB / AC

Es decir, la ecuación de la recta AG será:

y / x = 4 / 3

(*) y = (4 / 3) x

La ecuación de la recta DO es

(**) y = r

Las coordenadas del punto J, intersección de ambas rectas serán:

x = AK = DJ

y = AD = JK

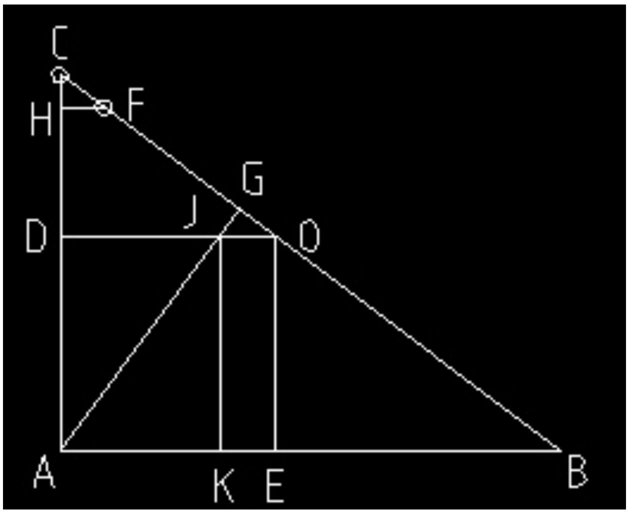


Fig. 5

Igualando los valores de y obtenidos antes (*) ((**), resulta el valor de la abscisa DJ del punto J.

$(4 / 3)\ x = r$

$x = (3 / 4)\ r$

con lo cual vemos que la hipotenusa JO del pequeño triángulo JOG valdrá

$DO - x = r - (3 / 4)\ r = JO$

Es decir $JO = r / 4$

Como en la primera solución ya se vio (***) que $r = 4\ CF$, será

$JO = 4\ CF / 4 = CF$

Que sean iguales las hipotenusas de dos triángulos semejantes significa que su razón de semejanza es la unidad, así que los triángulos además de semejantes, serán iguales. Bueno, iguales no, serán congruentes según se aprecia en las figuras.

OTRA DEMOSTRACIÓN DE LA IGUALDAD DE LOS TRIANGULITOS (la de mi amigo Mariano)
Serán iguales si sus catetos mayores son iguales, es decir si GO = HF.

En la Fig. 5, el triángulo AGO es rectángulo de hipotenusa AO y cateto mayor AG siendo

$AO = r \sqrt{2} = 1{,}7143 \sqrt{2} = 2{,}4244$

$5\ AG = 3 * 4$

$AG = 2{,}4$

GO resultará ser

$GO = \sqrt{(AO^2 - AG^2)} = 0{,}343$

$HF = CF \cos CFH = 0{,}4286 * 4 / 5 = 0{,}343$

Como se ve, GO = HF, cqd.

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández