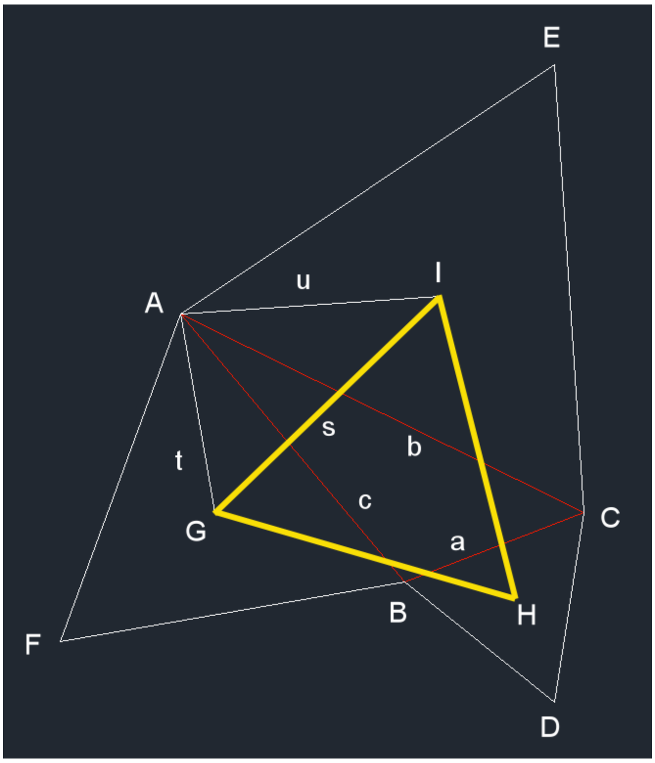
<u>ProbNapoleon</u>

El problema consiste en demostrar el Teorema de Napoleón que se enuncia como sigue según la imagen mostrada.



Sea un triángulo cualquiera ABC en rojo, de lados abc. Sobre cada uno de sus lados se construyen los triángulos equiláteros con vértices más extremos DEF. Probar que los centros de esos triángulos equiláteros HIG son los vértices de un nuevo triángulo equilátero (el amarillo).

El enunciado es cierto tanto si los tres triángulos equiláteros construidos sobre los lados rojos están desplegados al exterior o al interior del triángulo rojo de partida.

Existen diversas formas de demostración. La que sigue se debe al Dr. Scott Brody de la Facultad de Medicina en Monte Sinaí, NY. Es sencilla, elegante e ingeniosa.

El Δ(AIG) tiene por lados u, t, s (este último, es el lado del Δ equilátero amarillo).
En ese Δ, el <IAG = <BAC + <ub + <tc
Pero estos dos últimos ángulos valen 30º: no hay más que mirarlos dentro de los Δ equiláteros de centros I y G.
Así pues, en el Δ(uts) podremos escribir:

$$s^2 = u^2 + t^2 - 2ut\cos(cb + 60)$$

Siendo u = 2/3 de la altura del Δ equilátero de centro I, y t = 2/3 de la altura del Δ equilátero de centro G, será:

$$3s^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(cb + 60)$$

$\cos(cb + 60) = \cos(cb)/2 - \text{sen}(cb) \times \sqrt{3}/2$

$$3s^2 = b^2 + c^2 - bc\cos(cb) + bc\,\text{sen}(cb) \times \sqrt{3}$$

En el Δ(ABC) se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(cb)$$

En el mismo Δ(ABC) se tiene que su área = bc sen (cb) / 2

Sustituyendo bc sen (cb) y bc cos (cb) de estas dos últimas igualdades, en su anterior, da, por fin:

$$bc\,\text{sen}(cb) = 2\ \text{AREA}\ \Delta(ABC)$$

$$bc\cos(cb) = (b^2 + c^2 - a^2)/2$$

$3s^2 = b^2 + c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)/2 + 2\ \text{AREA}\ \Delta(ABC) \times \sqrt{3}$

$$3s^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/2 + 2\ \text{AREA}\ \Delta(ABC) \times \sqrt{3}$$

Es decir, hemos llegado a saber que el lado s del Δ amarillo (el señalado en la Figura) tiene un valor que depende exclusivamente de los datos que aporta el Δ rojo de partida. Y ello se ha conseguido mediante relaciones trigonométricas entre el vértice A (rojo) y el correspondiente lado amarillo s.

Es evidente que habríamos llegado al mismo resultado de haber relacionado el vértice rojo B con su correspondiente lado amarillo GH, o a C con IH: los tres valores de s serían iguales y, por, tanto, el Δ amarillo es equilátero.

-----o0O0o-----

Esta otra demostración del teorema de Napoleón recurre a la Geometría Proyectiva.

Partamos de la misma figura anterior que ahora llamaremos Fig. 1 para obtener de ella la Fig. 2 de la siguiente forma:

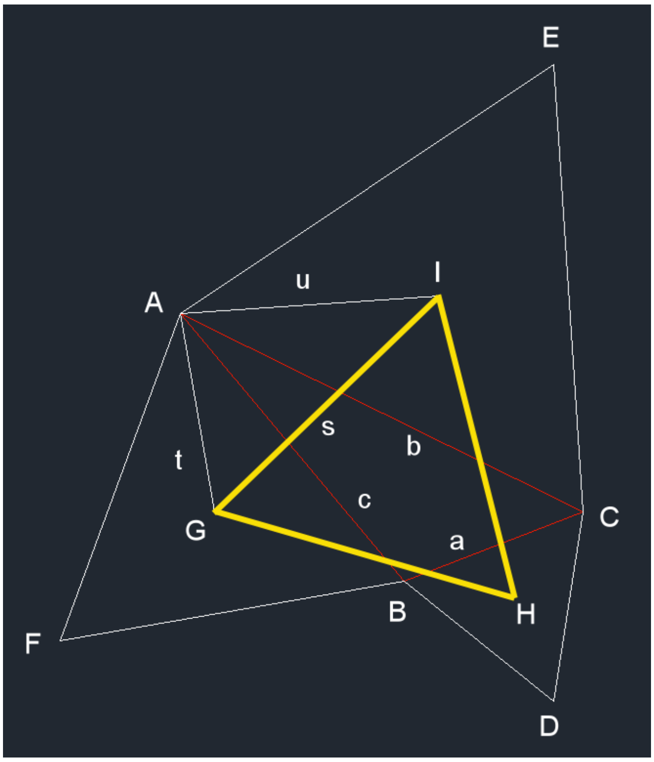


Fig. 1

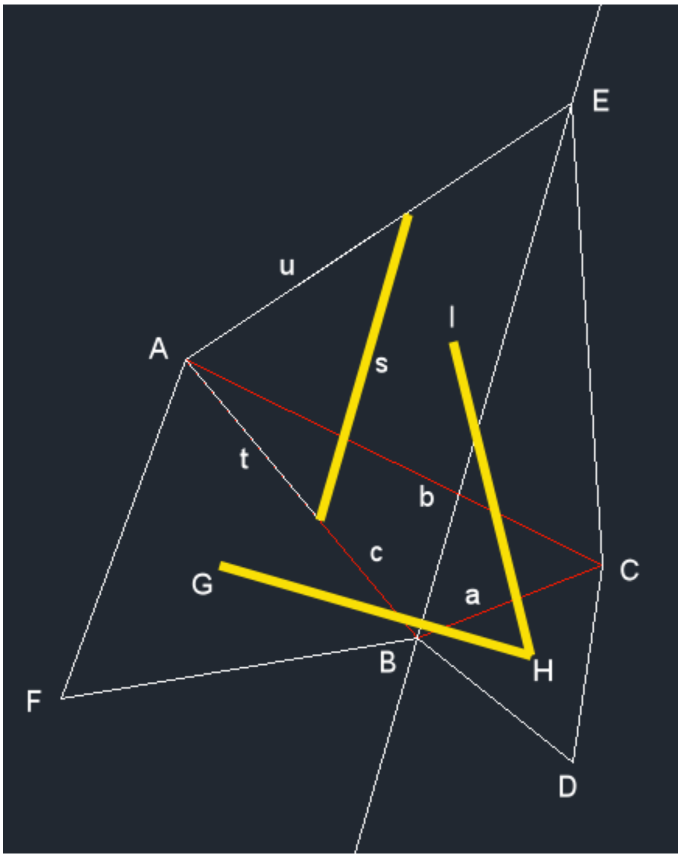


Fig. 2

Giramos el Δ tsu alrededor de su vértice A, 30º en sentido antihorario con lo que su lado t se superpone al lado rojo c y su lado u al lado AE (recordar que el ángulo tc = 30º). Y que en Fig. 1 (Δ AEC), u = AE / √3 porque en un Δ equilátero √3 es la relación del lado al radio.

A continuación (seguimos en Fig. 2) buscamos el segmento homotético del s, en una homotecia de vértice A y razón √3.

RECORDATORIO

Homotecia es una homología en la que su eje es la recta del infinito del plano; como consecuencia, los segmentos homotéticos son paralelos. La razón de homotecia es la relación constante entre cada pareja de segmentos homotéticos.
El segmento buscado ha de ser paralelo a s y ha de cumplir que “segmento buscado” / s = $\sqrt{3}$ o lo que es lo mismo (Teorema de Tales en en el Δ EAB) = AE / u.

Efectivamente, AE / u = $\sqrt{3}$ por ser la relación entre el lado y el radio del Δ equilátero de centro I que se ve en la Fig. 1.

En definitiva, el segmento buscado resulta ser EB con la consecuencia de que BE / s = $\sqrt{3}$. A esto hemos llegado tomando el vértice rojo A como centro de homotecia, pero

- de haber tomado el B habríamos obtenido que CF / s = $\sqrt{3}$
- de haber tomado el C habríamos obtenido que AD / s = $\sqrt{3}$

Es decir, los segmentos BE, CF y AD son iguales; al dividirlos los tres por $\sqrt{3}$ nos darán otros tres segmentos iguales, los s, es decir los tres lados del triángulo”Napoleón” que, por tanto, será equilátero.

NOTA

Antes giramos el Δ tsu alrededor de su vértice A, 30º en sentido antihorario, pero el resultado sería el mismo con giro en sentido contrario ya que a efectos del giro, el Δ tsu es simétrico respecto de la posición del vértice A.

-----o0O0o-----

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández