ProbMascuadra

Inspirado en Belén Garrido, Boletín PAJARITA de la AEP, Nº 153

Se dispone de un cuadrado como el de la Fig. 1 (a la izquierda) al que se ha desgajado el pequeño cuadrado de un vértice. El lado de este último mide una unidad de longitud. Se piden dos soluciones que tienen en común lo siguiente:

-Hay que plegar dicha Fig. 1 de manera que al cortarla después de plegada con un corte recto único se puedan obtener unas cuantas piezas que, colocadas adecuadamente todas, sin sobreponerse unas a otras, se consiga:

A) un cuadrado de área 8 unidades cuadradas.

B) Otro de 2.

Las soluciones A y B son incompatibles. Hay que desarrollarlas separadamente.

SOLUCIÓN

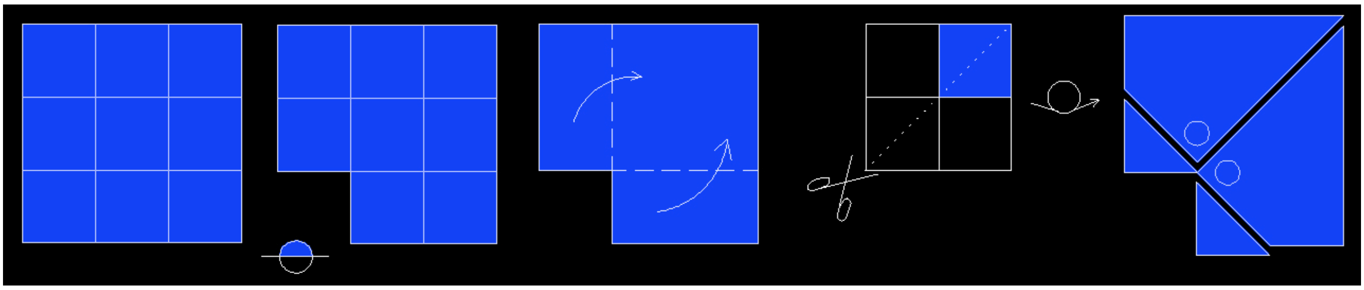

Fig. 1

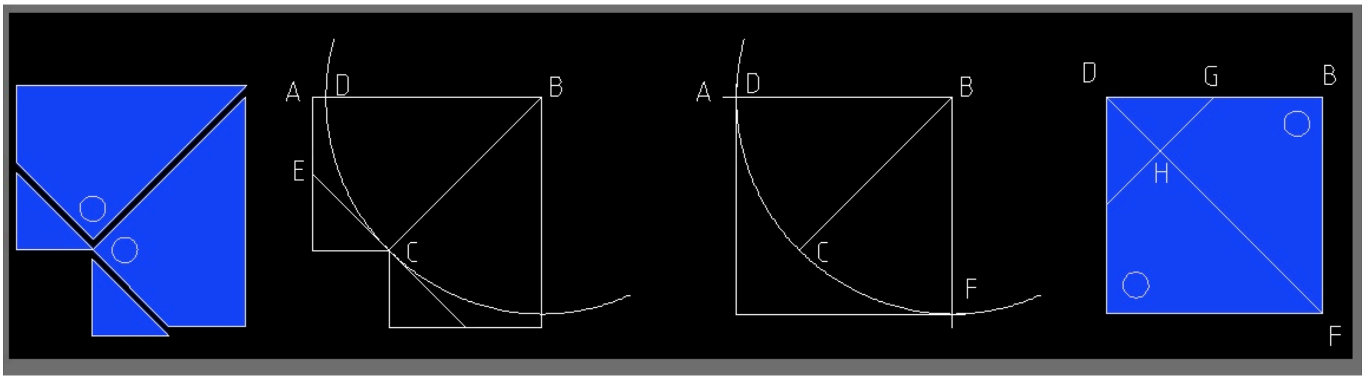

Fig. 2

El precario dato disponible lleva a intentar soluciones a base de prueba y error que conducen a que el lado del cuadrado original completo tiene que ser 3.

Empezaremos por la SOLUCIÓN A (Fig.2).

$AB = 3$

$EC = DG = \sqrt{2}$

$DB = BC = BF = AB \sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$DF = DB \sqrt{2} = 4$

$AE = DH = 1$

$FH = DF – DH = 3$

Área del cuadrado de lado DB = $(2\sqrt{2})^2 = 8$ unidades cuadradas.

Como se ve, la maniobra ha consistido en llevar los ángulos rectos de las dos grandes figuras (circu-leados en las piezas separadas), a ser los vértices del cuadrado final. Ello se consigue con un giro y una traslación de las cuatro piezas.

El cálculo demuestra que el cuadrado de área 8 se consigue cuando AB = 3 y AE = 1.

Veamos en la Fig. 3 qué ocurre cuando esa relación 3 / 1 cambia. En ella a es el lado del cuadrado de partida; $b = a / n$ es el lado del pequeño cuadrado descartable y c es el lado del cuadrado obtenido al final.

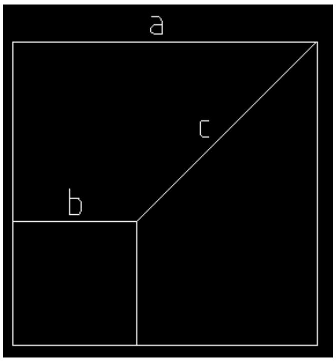

Fig. 3

$c = a \sqrt{2} – b \sqrt{2} = \sqrt{2} (a - b)$

Para $b = 0$
$c = a \sqrt{2}$
$c^2 = 2 a^2$
El área del cuadrado final es el doble que la el cuadrado inicial (ya lo decía el teorema de Pitágoras).

Como $b < a$, será
$1 < n < \infty$

para $n = 2$
$b = a / 2$
$c = \sqrt{2} (a - b) = (\sqrt{2} / 2) a$
$c^2 = a^2 / 2$
El área del cuadrado final es la mitad que la el cuadrado inicial.

para $n = 3$
$b = a / 3$
$c = \sqrt{2} (a - b) = \sqrt{2} (a – a / 3) = (2 \sqrt{2} / 3) a$
$c^2 = (8 / 9) a^2$
El área del cuadrado final es 8 mientras que la del cuadrado original es 9, según se vio.

para $n = 4$
$b = a / 4$

$c = \sqrt{2}\ (a - b) = \sqrt{2}\ (a - a / 4) = (3 \sqrt{2} / 4)\ a$

$c^2 = a^2 \times 9 \times 2 / 16 = 1{,}125\ a^2$
El área del cuadrado final es 1,125 veces mayor que el inicial.

SOLUCIÓN B (Fig. 4).

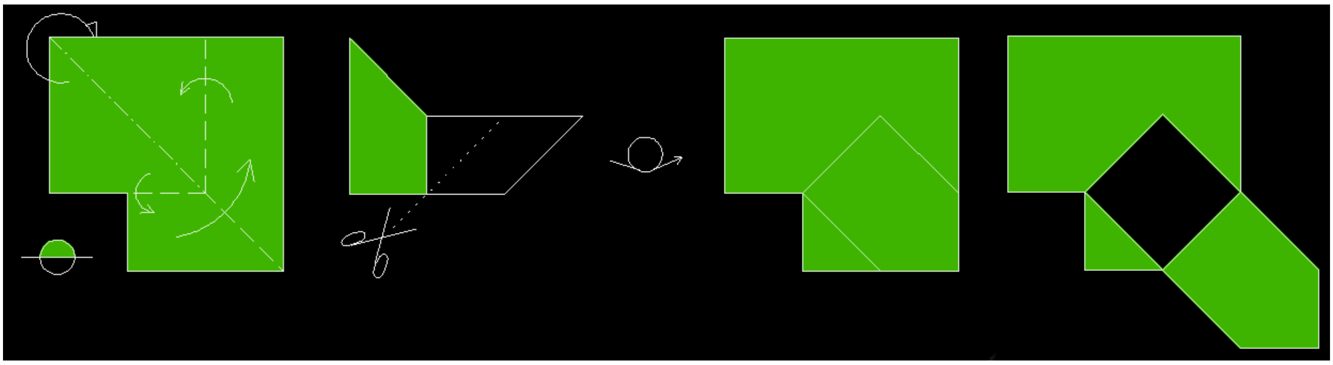

Fig. 4

Como se ve, con las tres piezas que resultan del corte, también se puede construir un cuadrado, ¡en negativo! Siempre es bueno acordarse del pensamiento lateral de Edward de Bono.

El cuadrado inicial es ahora el mismo que el de la Solución A. Aquí las áreas de los cuadrados inicial y final están en la proporción de 9 / 2.