ProbIsosceles

Construir un triángulo isósceles conociendo las longitudes de su base AB (roja) y de la bisectriz AC (verde) del ángulo de su base. Recordar que el ángulo BAC que formarán base y bisectriz en el triángulo isósceles ha de ser la mitad del ángulo en B del isósceles final. (imágenes a la izda. de Fig. 1 y a la decha. de Fig. 2)

SOLUCIÓN (con Autocad)

Construir el ángulo CAB (verde y rojo) de cualquier abertura menor de 45º (izda. Fig. 1).
Según Fig. 1 decha construir AE, simétrico de AB respecto de AC.
Y BD, simétrico de AE respecto de la mediatriz de AB.

Así tenemos el ángulo ABD que es el doble que el CAB, y las puntas C y D que hay que acercar entre sí.

Ese acercamiento se logra reiterando el proceso anterior aumentando cada vez la abertura del ángulo CAB original. El resultado se muestra en las figuras apiladas (izda. de Fig. 2). En la superior se ve lo próximas que están C y D.

No es necesario que coincidan C y D: basta que C se apoye en el mismo lado donde está D. Y eso es lo que se ha conseguido a la decha. de la Fig. 2 (triángulo isósceles resultante) gracias a que el zoom de Autocad permite ampliar el dibujo todo lo necesario para manejar ángulos de muy pequeña abertura.

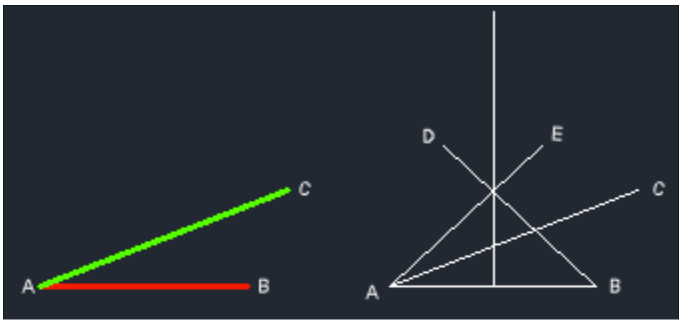

Fig. 1

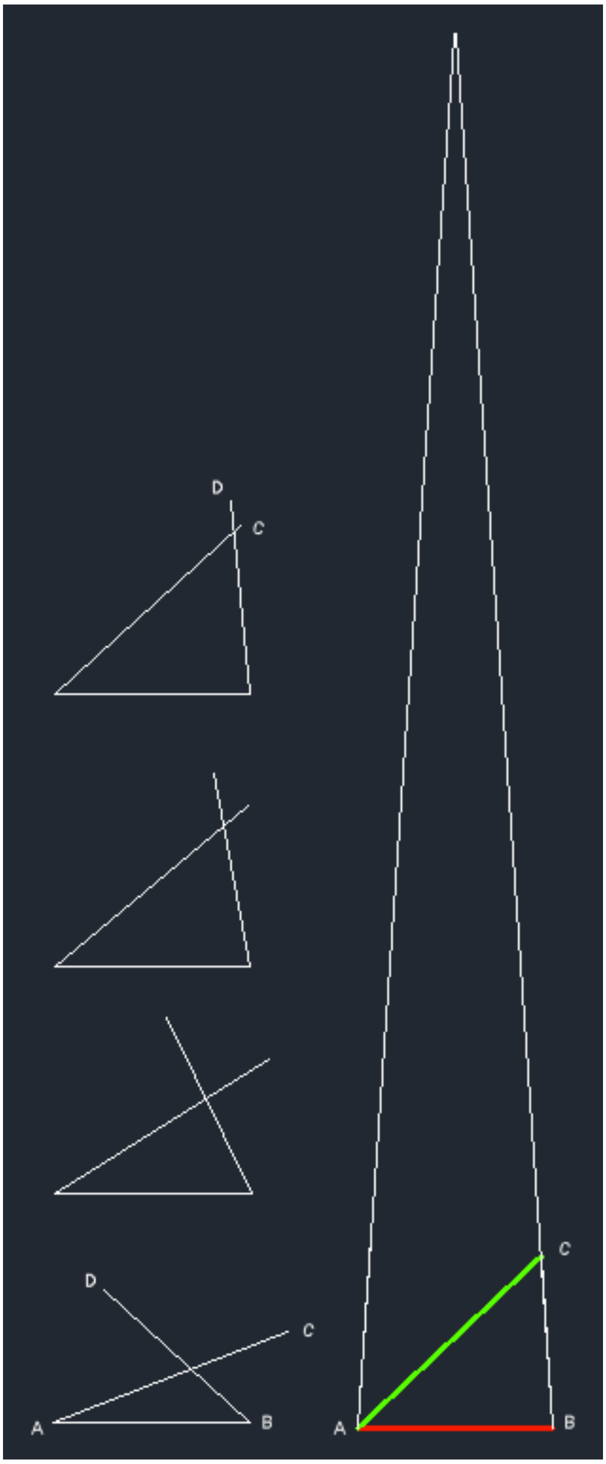

Fig. 2

CASOS PARTICULARES

Hasta aquí hemos trabajado con la hipótesis de que la bisectriz era mayor que la base. La Fig. 3 muestra el caso de que la bisectriz es igual a la base (a la izda.) o menor (a la decha.). Asimismo se muestran los triángulos isósceles resultantes.

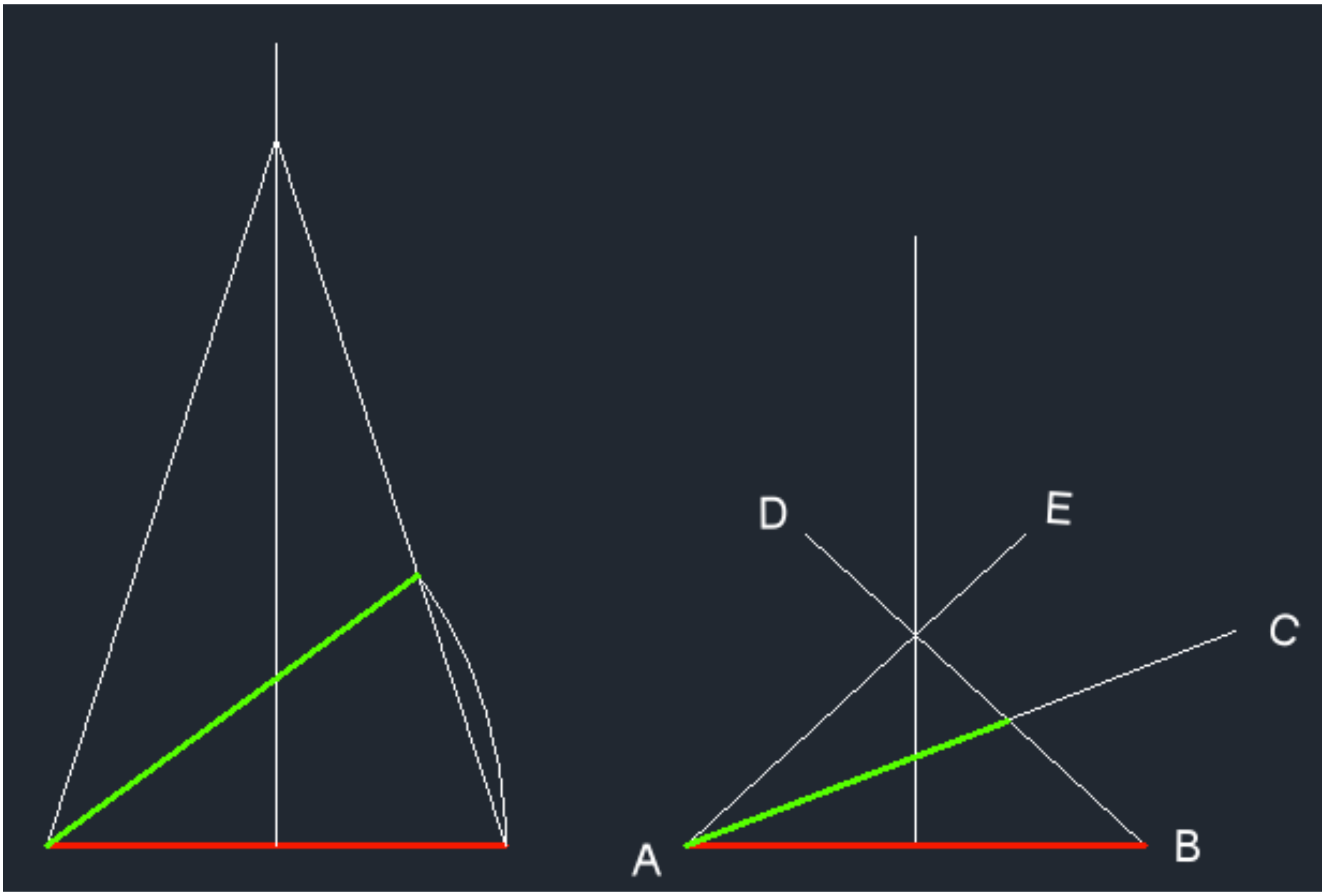

Fig. 3

La imagen de la izda. muestra un triángulo isósceles de lados rojo / verde iguales y por tanto será: A + 2A + 2A = 180. Es decir, A = 36. Con este dato ya se puede construir el triángulo isósceles pedido.

A la decha. tenemos la misma imagen que la de la decha. de la Fig. 1 en la que se ha superpuesto una bisectriz verde más corta. El resultado final es el único triángulo isósceles que en ella se muestra.

Corolario: Una bisectriz menor que la base da lugar a un triángulo isósceles chato. Si es igual produce un triángulo isósceles medio, y se es mayor, el triángulo resultante es picudo.

SOLUCIÓN (sin Autocad; pura geometría)

Dando el problema por resuelto, dibujamos la Fig. 4 extrayendo la parte baja de la decha. de Fig. 2, y añadiendo sobre ella lo que sigue.

Recordemos que ^ABC = 2 ^BAC.
Con radio BC y centro B se traza el arco CF y su cuerda CF.

Se han formado los Δ AFC y FCB que son semejantes porque:

Llamando A al ^CAB, en el Δ isósceles FCB es

^ BCF = [180 - (180 – 2 A]/ 2 = A

Es decir, aquella semejanza se debe a que los tres ángulos señalados son iguales, y por tanto, aquellos dos triángulos además de semejantes, son isósceles.

La semejanza nos permite escribir

AC / (AB + BF) = CB / CF

Como CF = AC por ser isósceles el Δ ACF, queda

$AC^2 = CB\ (AB + BC)$ (*)

$AC^2 = CB \times AB + BC^2$

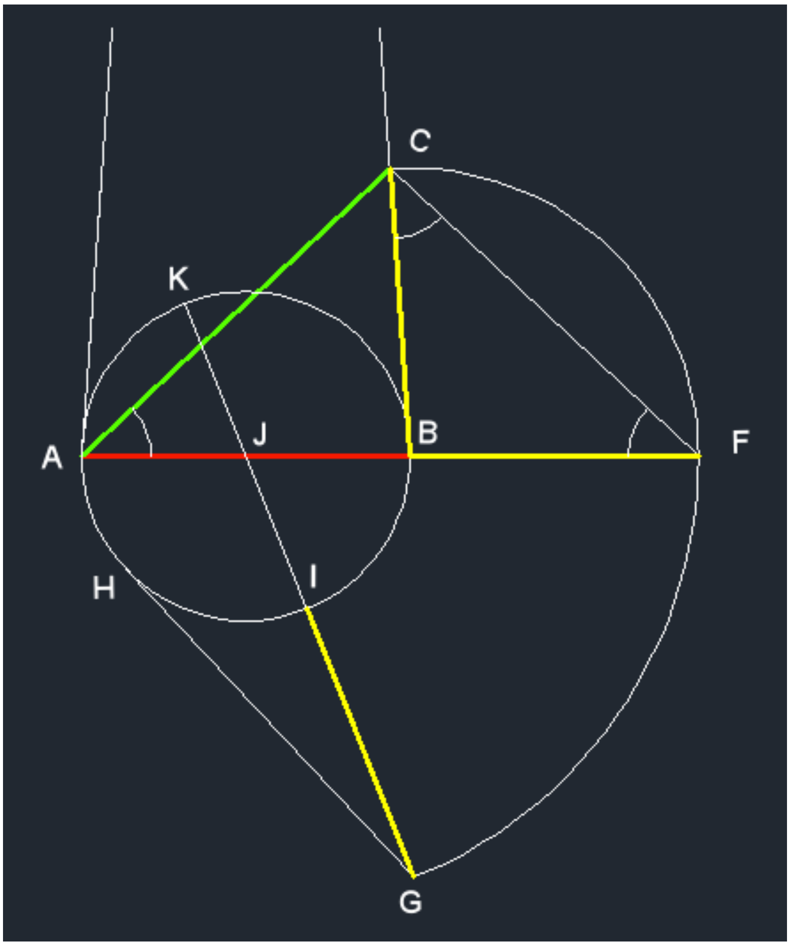

Fig. 4

Haciendo a la incógnita CB = X, será:

$X^2 + AB \times X - AC^2 = 0$

La forma de esta ecuación integra la condición exigida para los ángulos del Δ buscado, y sus coeficientes son los únicos datos disponibles, base y bisectriz. Resolviéndola, se tiene X = CB que es el segmento que nos faltaba al principio para formar el triángulo verde / rojo / amarillo. Para conseguir el Δ isósceles buscado, sólo falta trazar el rayo BC hasta que corte a la mediatriz de AB, y desde esta intersección, el segmento hasta A.

Una vez resuelto el problema, la Fig. 4 nos muestra que la igualdad (*) está materializada como equivalente a la potencia de un punto tal que el G respecto de la circunferencia de centro J.

$GH^2 = GI \times GK$

Siendo GI = CB y AB + BC = KI + IG, también será

GH = AC

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández