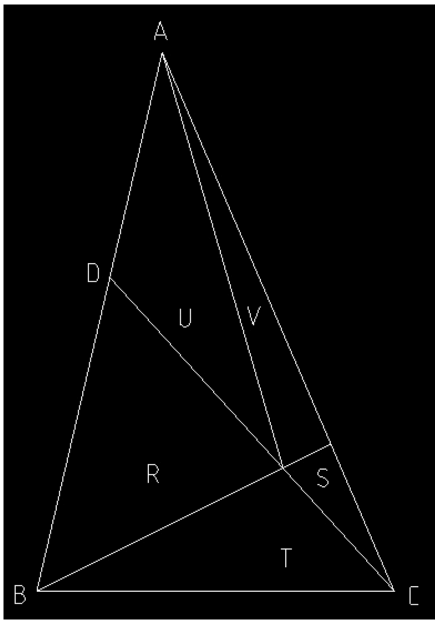
ProbInfinito

Sea el triángulo ABC de área X y sus triángulos interiores de áreas R, S, T, U,V:

Demostrar que

$$1 / X = [1 / (R + T)] + [1 / (S + T)] - (1 / T)$$

<u>SOLUCIÓN</u>



$X = R + S + T + U + V$

$X - T = R + S + U + V$

Teniendo en cuenta que (R + U) y V tienen la misma altura, que S y T también tienen la misma altura, aunque distinta de la otra, y que (R + U + V) y (T + S) tienen una base común, será:

$(R + U) / V = T / S$

Asimismo, Teniendo en cuenta que (S + V) y U tienen la misma altura, que R y T también tienen la misma altura, aunque distinta de la otra, y que (S + U + V) y (T + R) tienen una base común, será:

$(S + V) / U = T / R$

Las dos últimas igualdades pueden tomar la forma

$V / S = (R + U) / T$

$U / R = (S + V) / T$

Sumando

$$(V / S) + (U / R) = (R + U + S + V) / T = (X - T) / T = (X / T) - 1 \qquad (1)$$

Como U y R tienen la misma altura y lo mismo ocurre con (S + V + U) y (R + T). Y además, (U + R) y (S + V + U + R + T) tienen la base común, es:

$U / R = (S + V + U) / (R + T) = [X - (R + T)] / (R + T) = [X / (R + T)] - 1$

Como V y S tienen la misma altura y lo mismo ocurre con (R + U + V) y (T + S). Y además, (V + S) y (S + V + U + R + T) tienen la base común, es:

$V / S = (R + U + V) / (S + T) = [X - (S + T)] / (S + T)] = [X / (S + T)] - 1$

Sustituyendo los valores de U / R y V / S en la igualdad (1), tendremos:

$[X / (S + T)] - 1 + [X / (R + T)] - 1 = (X / T) - 1$

que equivale a la expresión propuesta

$$1 / X = [1 / (R + T)] + [1 / (S + T)] - (1 / T)$$

que se pretendía demostrar.

Como se ve, esa expresión relaciona el área total X con las parciales R, S, T.

Si llevamos el vértice A al infinito [(1 / X) = 0], ocurrirá que *b* y *c* serán paralelos y perpendiculares a *a*. Entonces será

$$[1 / (R + T)] + [1 / (S + T)] = (1 / T)$$

que es lo mismo que se pedía demostrar en ProbEscaleras.