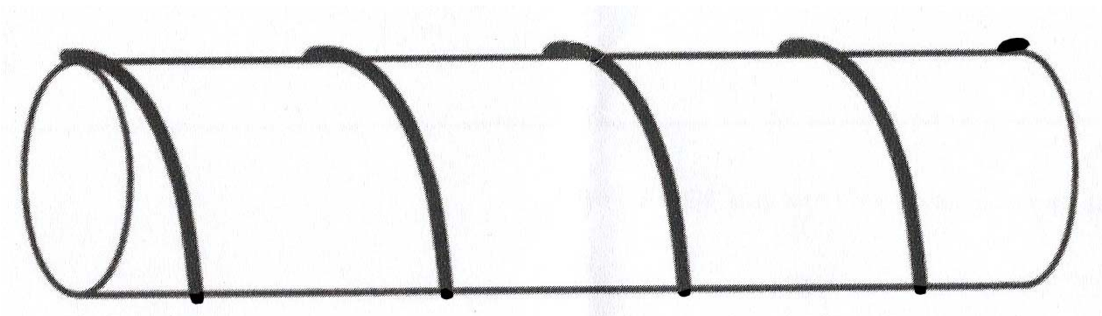
Una cuerda está uniformemente enrollada alrededor de un cilindro según la Fig. 1. La cuerda da, exactamente, 4 vueltas alrededor del cilindro que tiene una circunferencia de 4 cm y una longitud de 12 cm. Averiguar cuánto mide la cuerda.

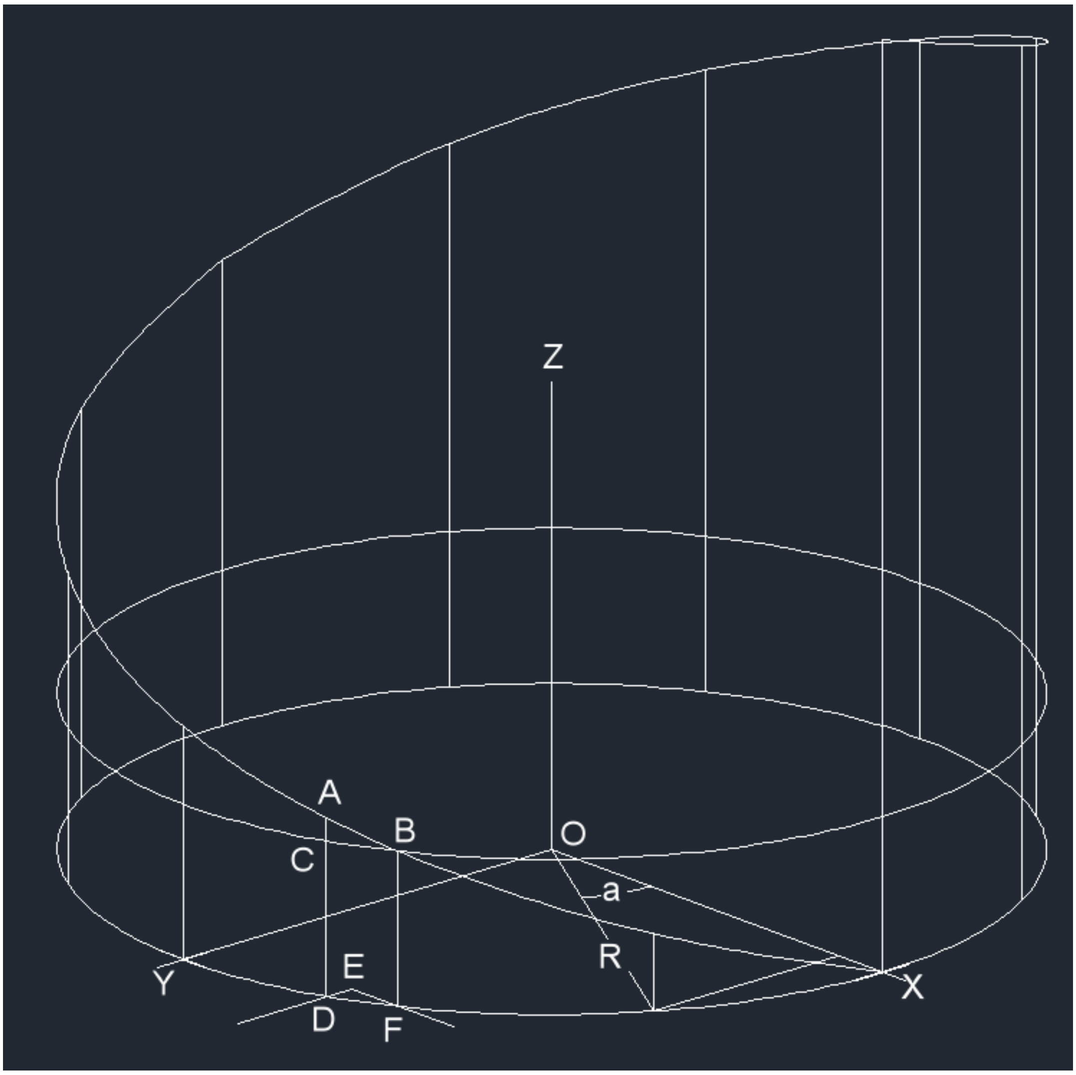
Fig. 1



Lo que muestra el enunciado del problema es la definición de un hélice que tiene un paso de

p = 12 (longitud del cilindro) / 4 vueltas = 3 cm.

Paso de una hélice es lo que avanza al girarla un ángulo equivalente a una circunferencia ó 2π radianes.



En la Fig. 2 tenemos otra visión de una hélice que arranca en el punto de coordenadas (R,0,0) y se enrosca cilindro arriba hasta el punto final que está en la vertical por el punto de arranque.

Ese punto final tiene por coordenadas (R,0,p) siendo p el paso de la hélice. Es decir, la hélice ha avanzado dese el origen una longitud p cuando se ha girado un ángulo de 360º

Fig. 2

Si nos fijamos en un triángulo cilíndrico como el que tiene por vértice el punto de arranque de la hélice y lado opuesto a BF, por ejemplo, notaremos que puede desarrollarse sobre un plano ya que el cilindro es una superficie reglada. Los lados de ese triángulo, que es rectángulo por ser BF perpendicular al plano XY, son:
-La hipotenusa es un arco de hélice.
-El cateto menor BF es lo que ha avanzado la hélice desde el punto de arranque.
-El cateto mayor es un arco de la circunferencia base del cilindro.

Por tanto, si dibujamos en un plano el triángulo rectángulo que tenga por cateto mayor la longitud de la circunferencia y por cateto menor el paso de la hélice, resultará que su hipotenusa equivaldrá al arco de hélice correspondiente a su paso.

Si luego enrollamos ese triángulo sobre el cilindro, podremos dibujar en él un arco completo de hélice guiando el lápiz sobre la hipotenusa. Si repetimos el dibujo 4 veces sucesivas habremos dibujado la cuerda que cubre todo el cilindro. La cuerda medirá, por consiguiente, tanto como 4 hipotenusas.

Y, cuánto mide la hipotenusa en cuestión?
$\sqrt{[(\text{paso de la hélice})^2 + (\text{longitud de la circunferencia base del cilindro})^2]} = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$ cm

La cuerda medirá, por tanto, $5 \times 4 = 20$ cm.

Hay que notar que hemos hablado sólo del triángulo rectángulo grande, el que produce el arco de hélice correspondiente a su paso, pero de él podemos obtener otro mas pequeño, semejante, que tenga como cateto menor la ordenada z en vez del paso p y que, por tanto guardará con él la razón de semejanza z / p.

Hasta aquí, la forma fácil e intuitiva de resolver el problema. Veamos cómo lo resuelve el cálculo integral aprovechando la misma Fig. 2.

Primero, vamos a establecer la ecuación de la hélice en coordenadas paramétricas, siendo a el parámetro variable: a es el ángulo que gira el punto de arranque de la hélice para elevarse a una altura z tal que $z / p = (\text{arco de circunferencia correspondiente al ángulo a}) / 2\pi R$. Es decir:

$$z / p= (a \times R) / 2\pi R \qquad z = (p \times a \times R)/ 2\pi R = (p \times a) / 2\pi$$

Por tanto, las tres coordenadas de un punto cualquiera de la hélice tal como el A, serán, en función de a (del ángulo a correspondiente a A, no del indicado en la Fig. 2 como a):

$x = R \cos a$
$y = R \operatorname{sen} a$
$z = pa / 2\pi$

Diferenciando:

$dx = -R \operatorname{sen} a \, da$
$dy = R \cos a \, da$
$dz = (p / 2\pi) \, da$

Si observamos en la Fig. 2 los triángulos ABC (vertical) y DEF (horizontal), veremos que, en el límite de la diferenciación esos triángulos son triángulos rectángulos planos, y tendremos:
EF = dx
ED = dy
AC = dz
AB = dl
CB= DF
Siendo dl = diferencial de la longitud de curva-hélice; L será la longitud total de ésta correspondiente a un paso. Así pues, será:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 = AC^2 + DF^2 = AC^2 + ED^2 + EF^2$

$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 \text{ sen}^2 a \, da^2 + R^2 \cos^2 a \, da^2 + (p / 2\pi)^2 da^2 = R^2 da^2 + (p / 2\pi)^2 da^2$

$$dl = \sqrt{[R^2 + (p / 2\pi)^2]} \, da$$

$$L = \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}} \int_0^{2\pi} da = 2\pi \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}} = \sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2}$$

Como en nuestro caso es

$2\pi R = 4$ $\qquad p = 3$

será: $L = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$ (para un paso de hélice; $5 \times 4 = 20$ cm para la hélice completa)