ProbEstrella

-Averiguar cuánto suman los ángulos de las puntas de cualquier polígono estrellado, ya sea regular o irregular.

-Mostrar cuántas circunferencias hay que recorrer para conseguir un polígono estrellado (lo llamaremos estrella) a partir de su correspondiente convexo.

Primero, vamos a sentar las bases para la posibilidad de estrellar un polígono regular convexo.

Llamaremos n a la cantidad de lados (y ángulos) del polígono regular convexo. Y p al paso de su polígono estrellado correspondiente, es decir, a la cantidad de lados del polígono convexo que están subtendidos por un lado del polígono estrellado (cuerda de la circunferencia en la que están inscritos los polígonos).

Fig. 1

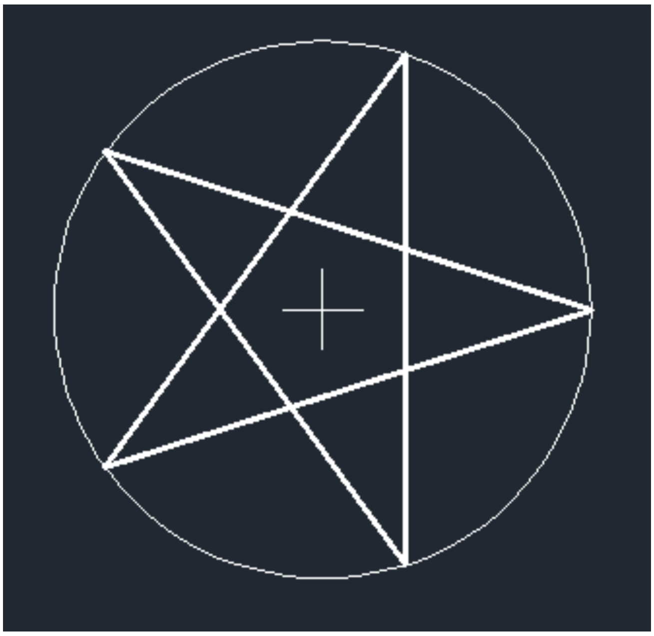
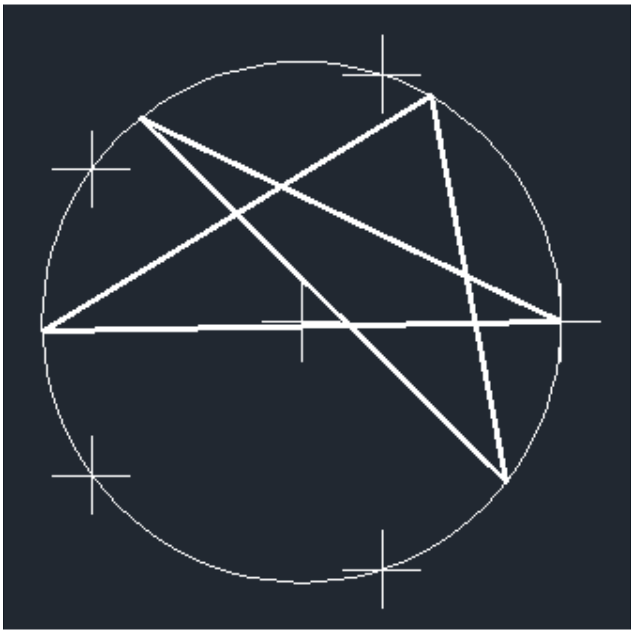


Fig. 2



Generalizando a polígonos regulares e irregulares, los estrellados se designan como n / p. En la Fig. 1 se ve un pentágono estrellado 5 / 2. El pentágono regular convexo se identifica por sus 5 vértices sobre la circunferencia en la que está inscrito. En la Fig. 2 está inscrito con sus 10 lados (el doble que un convexo), un pentágono estrellado irregular.

En ambos polígonos estrellados, regular e irregular, se ven, hacia el centro de sus circunferencias, sendos pentágonos convexos, respectivamente, regular e irregular.

Condiciones que deben cumplir los polígonos estrellados.

* p > 1. Es evidente que no puede ser p < 1 pero tampoco p = 1 porque ello desembocaría en un polígono convexo.

* p y n han de ser primos entre sí. No basta decir que n ha de ser impar. Un n impar como 9 / 3 es imposible porque conduce también a un polígono convexo. Por el contrario, un n par como 8 / 3 ó 10 / 3 sí es posible.

* n / p > 2. Para un n / p viable, si p supera media circunferencia, el polígono estrellado que se obtiene coincide con algún otro de los ya posibles.

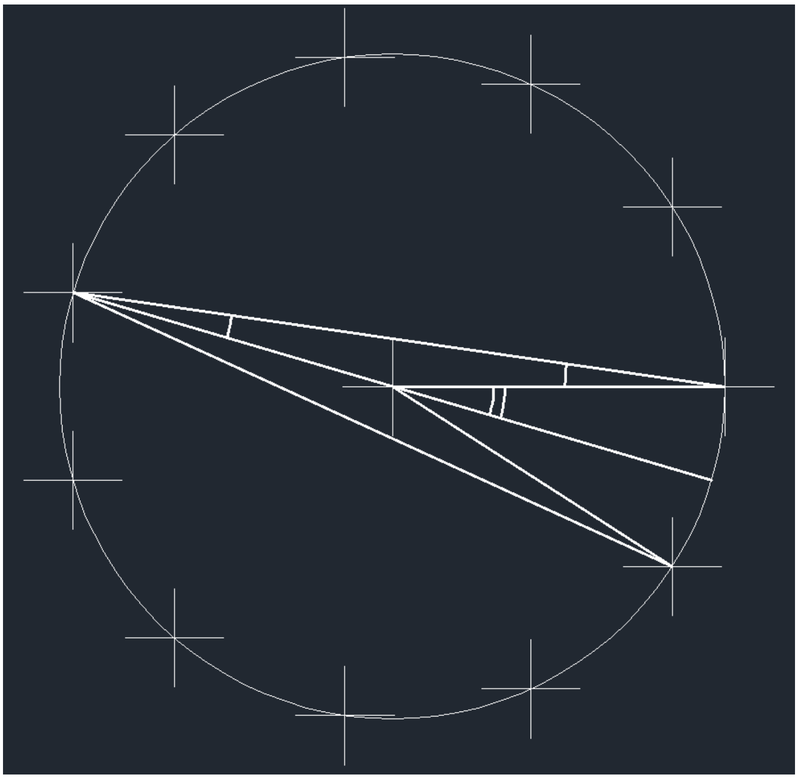


Fig. 3

En la Fig. 3 se ve, en construcción, un 11 / 5 mostrando un ángulo de punta de estrella con su correspondiente ángulo en el centro para constatar que este último mide el doble que el primero.

Para demostrar esto último en el caso de polígonos regulares, observemos el diámetro que separa dos triángulos isósceles simétricos. El de arriba tiene marcados sus dos ángulos iguales con sendos arcos. Con doble arco se señala el ángulo exterior correspondiente al ángulo obtuso.

Como el ángulo de doble arco mide tanto como la suma de los dos de un solo arco por ser ángulo exterior en el triángulo, resulta que el ángulo en el centro mide el doble que el de punta (recordar la simetría de los dos triángulos obtusángulos).

La fig. 4 produce la misma demostración para el caso del pentágono estrellado irregular de la Fig. 2. Según ella podemos escribir lo siguiente.

En el ΔOCD:
Ang DOA = 2 Ang OCD
En el ΔOCB:

Ang BOA = 2 Ang OCB

Restando:

Ang (DOA - BOA) = 2 Ang (OCD - OCB)

Ang DOB = 2 Ang DCB

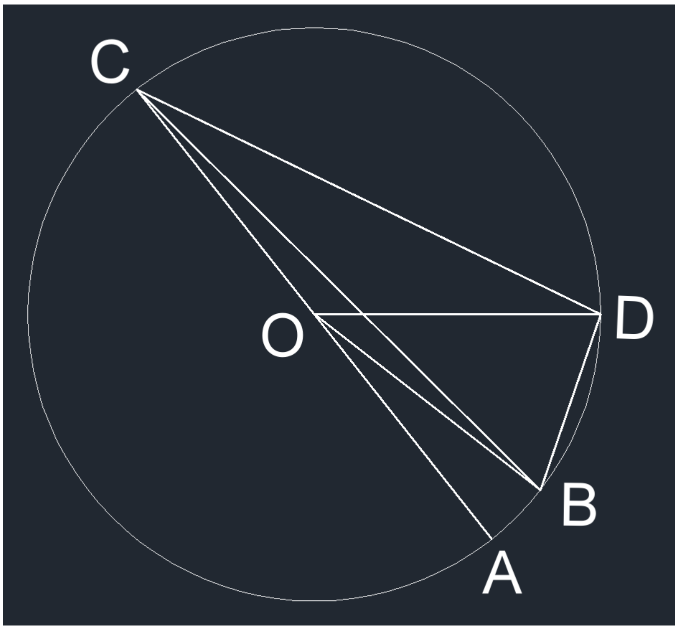
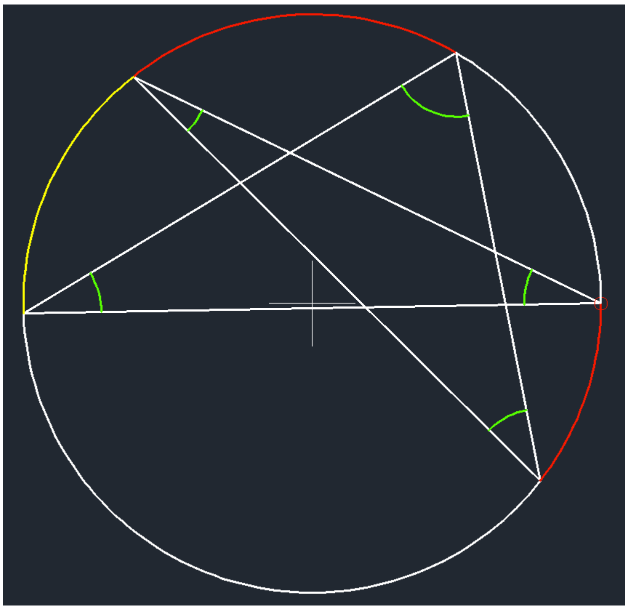


Fig. 4

Fig. 5



La Fig. 5 es la misma Fig. 2 en la que se han señalado en verde los ángulos de la estrella y en rojo, blanco y amarillo, sus correspondientes ángulos en el centro. Estos últimos cinco suman una circunferencia completa, así que la suma de los verdes sumará media circunferencia, como se acaba de ver.

Veamos la cuestión de las vueltas de circunferencia que hay que dar. En la Fig. 6 se muestra una estrella 11 / 4 y se parte del vértice A con el lado rojo de salida AB para terminar con el lado CA de llegada a A, también rojo. Entre ambos se van alternando los colores rojo y blanco para los sucesivos lados.

Desde el centro trazamos el rayo verde por A que servirá para hacer la cuenta de cuándo se supera una circunferencia durante la construcción. Se ve que ello ocurre en cuatro ocasiones: con los dos lados rojos que se cortan sobre la línea verde; con un lado blanco vertical y con el lado CA que completa la construcción con su llegada a A. Este último lado no supera realmente a la línea verde: se queda en ella como punto final.

Es decir, se han producido sucesivamente 4 trazados de circunferencias: la primera empieza en A y la última, la pé*sima*, termina en A. Por tanto, hay que dar p vueltas, cantidad igual al paso del polígono estrellado 11 / 4 que hemos manejado.

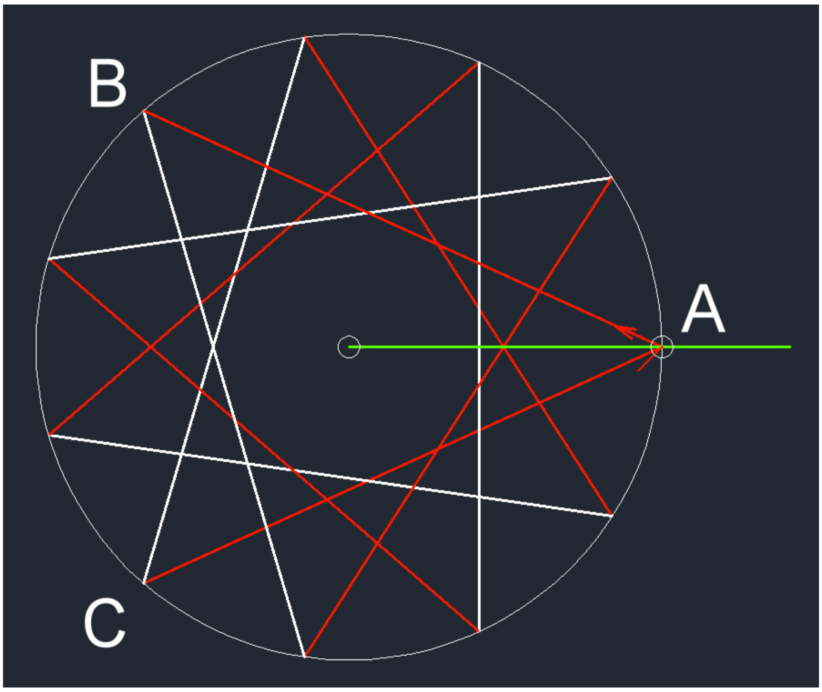


Fig. 6

…----oooOooo----…

De polígonos estrellados y no estrellados
La dualidad Pascal - Brianchon

Aquí se muestra la complementación dual que se da entre punto y recta que es de tanta utilidad en la Geometría Proyectiva. La recta, como hecha de puntos y el punto como intersección de dos rectas. El nexo se produce en torno a una cónica, la elipse o la circunferencia, en este caso.

Teorema de Pascal

Queda plasmado en la Fig. 7 que muestra un hexágono irregular inscrito en una elipse. Los lados opuestos de aquel se prolongan hasta cortarse en un punto con lo cual se obtienen tres puntos que resultan estar alineados según la *recta de Pascal* (en rojo).

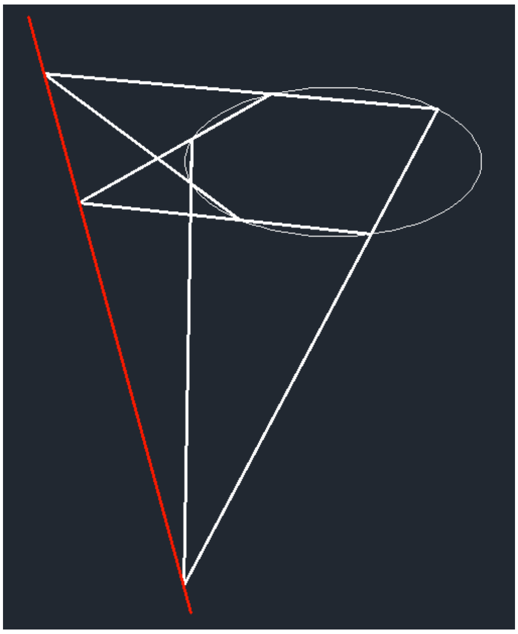


Fig. 7

Teorema de Brianchon

Se explica en la Fig. 8 en la que se ve un hexágono irregular circunscrito a una elipse de forma que, uniendo cada dos vértices opuestos se obtienen tres diagonales que se cortan en un punto único, el *punto de Brianchon* (en rojo).

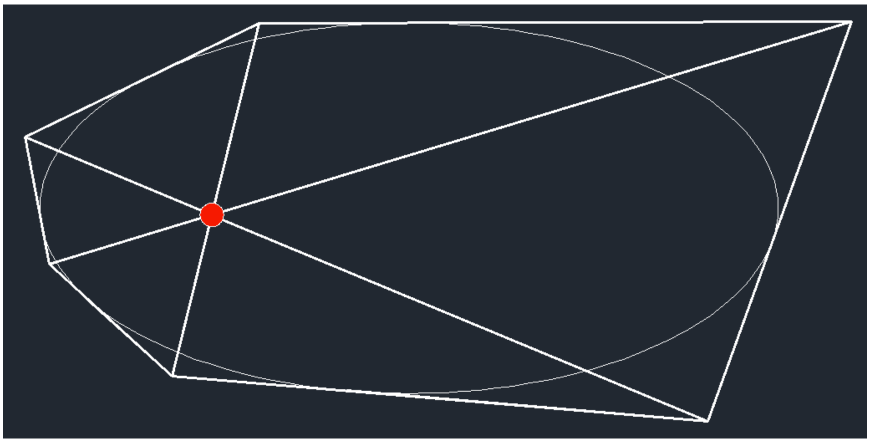


Fig. 8

Es de destacar *la fuerza* inherente a la *recta de Pascal* teniendo en cuenta lo que sigue.

Decía al principio que la formación de polígonos estrellados tenía ciertas limitaciones De ellas resalto ahora la de que hasta aquí hemos hablado siempre de polígonos estrellados con un paso p fijo. Veamos ahora lo que ocurre cuando el paso no es fijo sino que varía a conveniencia según se dan vueltas de circunferencia.

Tomemos la Fig. 9 en la que se ve un hexágono regular convexso inscrito no en una elipse, sino en una circunferencia. Describiremos el hexágono (auto-intersecante) estrellado resultante del proceso de construcción, como

A 2 B 2 C3 D4 E 4 F 3 A (*)

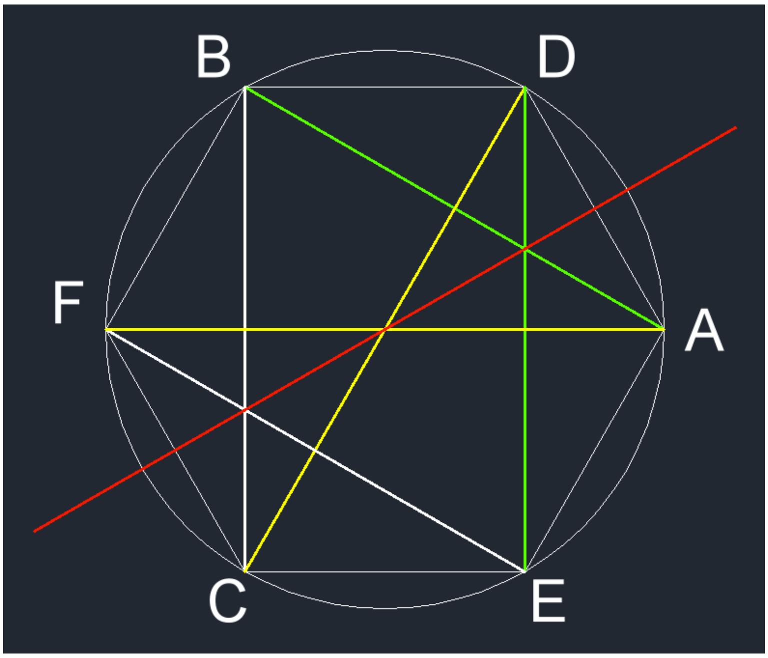


Fig. 9

Cada letra designa un vértice (del hexágono regular convexo y de la estrella). Su orden es el seguido en la construcción, de manera que cuando en ésta paso de A a B dejo a mi derecha 2 arcos del polígono base (AD y DB). En el viaje, siempre he de mirar a la derecha para ver cuantos arcos puedo contar. Ya se ve que, en la maniobra completa he manejado dos pasos de 2 arcos, dos de 3 y dos de 4. En total he dado dos vueltas de circunferencia, la primera al pasar de C a D (3 arcos a mi derecha) y la segunda al terminar yendo de F a A (también 3 arcos a mi derecha).

En la Fig. 7 se ve claro cuales son los lados opuestos del hexágono que producen al intersecar los tres puntos de la recta roja de Pascal. Entre esos dos lados opuestos siempre hay otras dos parejas: una del lado de su intersección y otra del lado opuesto.

No es igual de claro lo que ocurre en la Fig. 9. En ésta los puntos de intersección están, respectivamente, donde se cortan los dos lados verdes, los dos amarillos y los dos blancos. Estos tres puntos son los que determinan ahora la recta (roja) de Pascal.

Tomemos, por ejemplo, los lados verdes AB y DE. Si miramos (*) podemos ver que entre ellos existen las dos parejas de lados BC más CD, de una parte y EF más FA por otra. Algo semejante ocurre con las intersecciones blanca y amarilla. Se ve, pues, que los dos lados verdes son opuestos, y otro tanto se puede decir de los amarillos y de los blancos. Por consiguiente, es correcto afirmar que la recta de Pascal es la roja dibujada en dicha Fig. 9.

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández