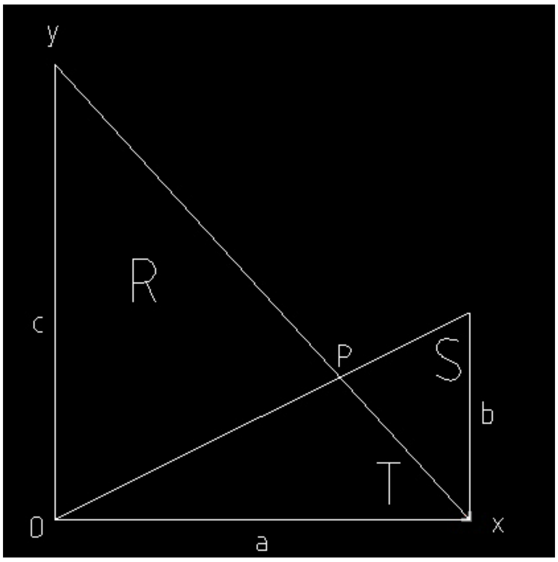
ProbEscaleras

En la Figura aparecen los triángulos de Área R, S y T que tienen los lados verticales b y c y el horizontal a, respectivamente. Se pide demostrar que

$$[1 / (R + T)] + [1 / (S + T)] = 1 / T$$



SOLUCIÓN

Tomamos O como origen de coordenadas. Será P (x, y).

La ecuación de la recta PO es:

$y / x = b / a$

$y = (b / a)\ x$

La ecuación de la otra recta por P, determinada por los puntos (0, c) y (a, 0)es:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & c & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$cx + ay - ac = 0$

$y = c - (c / a)\ x$

igualando las dos y, tenemos la x de P:

$c - (c / a)\ x = (b / a)\ x$

$c = (b / a)\ x + (c / a)\ x = [(b + c) / a]\ x$

$x = ac / (b + c)$

$y = bc / (b + c)$

ÁREAS

$R + T = ac / 2$

$S + T = a\ b / 2$

$T = ay / 2 = abc / [2\ (b + c)]$

Sustituyendo en la igualdad propuesta por el enunciado $[1 / (R + T)] + [1 / (S + T)] = 1 / T$
los valores R, S, T por los hallados, nos da:

$[1 / (ac / 2)] + [1 / (a\ b / 2)] = 2\ (b + c) / abc$
que efectivamente se convierte en la identidad $2\ (b +c) = 2\ (b + c)$