ProbEquis

Dada la Fig. 1 hallar las áreas de X y del rectángulo.

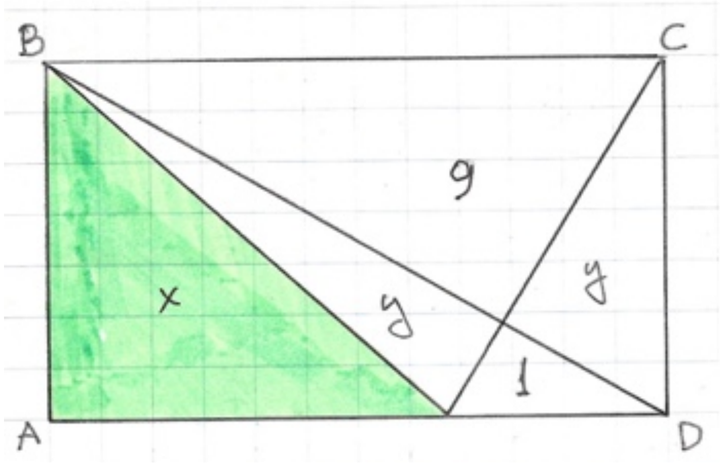


Fig. 1

SOLUCIÓN

1.-No hacía falta que el enunciado nos dijera que y = y. Los dos triángulos de áreas y + 1 son iguales porque tienen la misma base e iguales alturas. Si a cada uno de ellos se le quita el área 1 quedan los dos triángulos de áreas iguales a y.

2.-Los dos triángulos de áreas 9 y 1 son semejantes, así que su razón de semejanza será √(9 / 1) = 3. Es decir, la base del triángulo de área 1 medirá BC / 3. Por tanto, la base del triángulo Xuc medirá (2 / 3) BC.

3.-Para evitar confusiones, en adelante añadiré uc (unidades cuadradas) a los dígitos que representen áreas; las unidades lineales no tendrán esa distinción.

4.-Haremos la base del rectángulo b = BC = AD = 3. Y llamaremos a su altura a = AB = DC. Ello nos conducirá a una Fig. 2 en la que tendremos:

b = 3

$$\left.\begin{array}{l} ab / 2 = 9uc + yuc \\ 1 \times a / 2 = yuc + 1uc \end{array}\right\} \quad \text{igualando las yuc:}$$

(ab / 2) - 9uc = (a / 2) – 1uc

(3 a / 2) - 9uc =(a / 2) – 1uc

3 a -18uc = a – 2uc

2 a = 16uc

a = 8

Ya se ve que el rectángulo b × a de la Fig. 2 no es alargado como el de la Fig. 1, sino alto. El área X medirá

X = (1 / 2) (2b / 3) a = auc = 8uc.

El área del rectángulo será:

$b \times a = 3 \times 8 = 24$ uc

Que Xuc = 9uc – 1 uc = 8uc parece casualidad, pero con la Fig. 2 vamos a ver que no hay tal.

En ella, ABCD es el rectángulo de partida. El triángulo V es el de área 1uc y el BCF tiene de área 9uc. El BAE es el de X = 8uc.

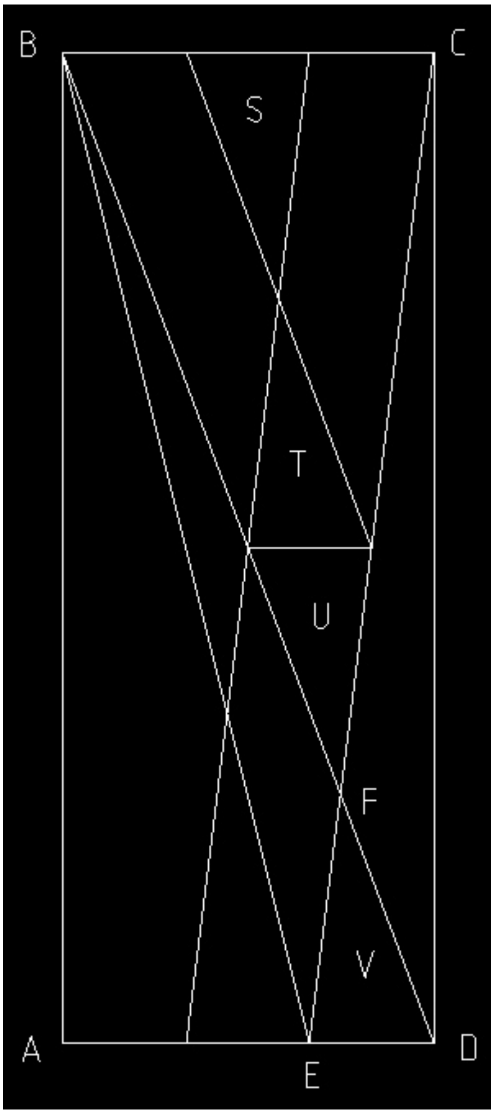
Los triángulos S, T, U, V son semejantes e iguales (tienen sus ángulos iguales y también sus bases). Por tanto, tienen sus cuatro alturas iguales, o sea, la altura de cada uno mide AB / 4 = a / 4.

Si a BCF le restamos U (U = V = 1uc) queda el trapecio de área

$(a / 2)(b + 1) /2 = 4 \times 4 / 2 = 8$uc

que es igual a la del triángulo Xuc. Ello demuestra que no es casualidad lo de 9 -8 = 1, sino pura constatación geométrica.

Fig. 2



La Fig. 1 como variante de la Fig. 4.

Ahora llamaremos, en dicha Fig. 1, B a la base grande del trapecio y b a su base pequeña; h será su altura, igual a la del rectángulo.

Como los triángulos de áreas 9 y 1 son semejantes, tanto sus bases como sus alturas estarán en la proporción 3 / 1. Es decir, la altura del primero será h × 3 / 4 y la del segundo h / 4. Ver que este 4 es el mismo que la cantidad de triángulos S, T, U, V de la Fig.2.

Igualando el área del trapecio a la suma de las áreas de los cuatro triángulos que lo forman, tenemos:

$$\frac{B+b}{2}h = \frac{B}{2}\frac{3}{4}h + \frac{b}{2}\frac{h}{4} + 2\left(\frac{bh}{2} - 1\,uc\right)$$

Ahora los datos son:

B = 3
b= 1

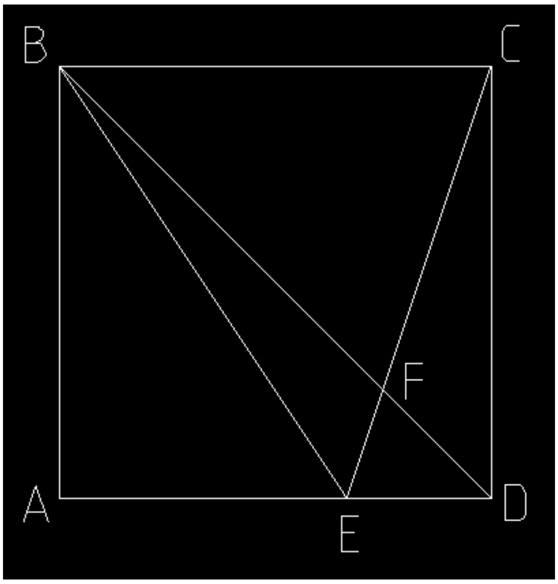
La incógnita es h que resulta de valor 8.

La base del triángulo de área X es B – b = 3 – 1 = 2
Y su altura es h = 8, así que será

X = (1 / 2) 2 × 8 = 8 uc.

El área del rectángulo será B × h = 3 × 8 = 24 uc.

NOTA
Tracemos en el interior de un rectángulo cualquiera los tres segmentos de Fig. 1 según la solución manejada. Los valores de área en uc de los cinco triángulos resultantes se mantienen constantes a manera de invariante para cualquier rectángulo de partida, después de afectarlos del valor de escala que corresponda.



Veamos lo que ocurre, por ejemplo, con un cuadrado de 12 cm de lado, en la Fig. 3.

Un cuadrado no es, en definitiva más que un rectángulo algo especial.

Fig. 3

Lado AB = 12 cm.
Área 144 cm^2
ED = AB / 3 = 4 cm

$ABE = AB \times AE / 2 = AB\ (AD - ED) / 2 = 12\ \ (12 - 4) / 2 = 48\ cm^2$
$BCF = (1 / 2)(3 / 4)\ CD \times BC = (3 / 8)\ 12 \times 12 = 54\ cm^2$
$EFD = (1 / 2)(1 / 4)\ CD \times ED = (1 / 8)\ 12 \times 4 = 6\ cm^2$
$CFD = BFE = CED - FED = (1 / 2)\ CD \times ED - 6\ cm^2 = (1 / 2)\ 12 \times 4 - 6\ cm^2 = 18\ cm^2$

Dividiendo todas las áreas por su máximo común divisor 6, queda la invariante

$$\begin{array}{cccc} & & 9 & \\ 8 & 3 & & 3 \\ & & 1 & \end{array}$$

Si se parte de un trapecio en vez de un rectángulo, se mantiene la invariante 9, 3, 3, 1 pero se descarta el 8.