ProbCuadril

El problema consiste en demostrar el teorema de Van Aubel que se enuncia así (Fig. 1): Si sobre los cuatro lados de un cuadrilátero cualquiera construimos los correspondientes cuadrados, los segmentos que unen los centros de cuadrados opuestos tienen la misma longitud y se cortan perpendicularmente.

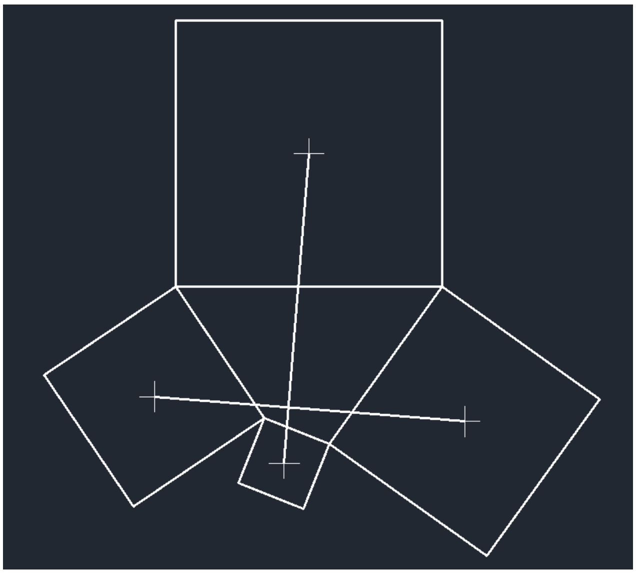


Fig. 1

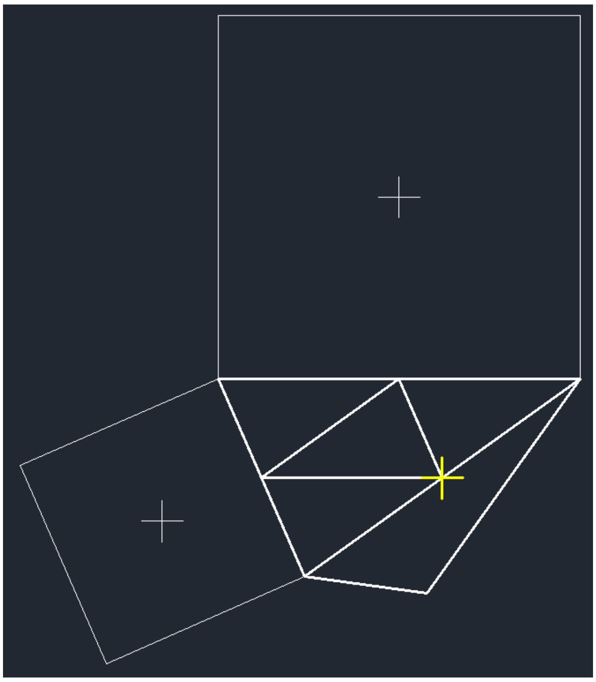
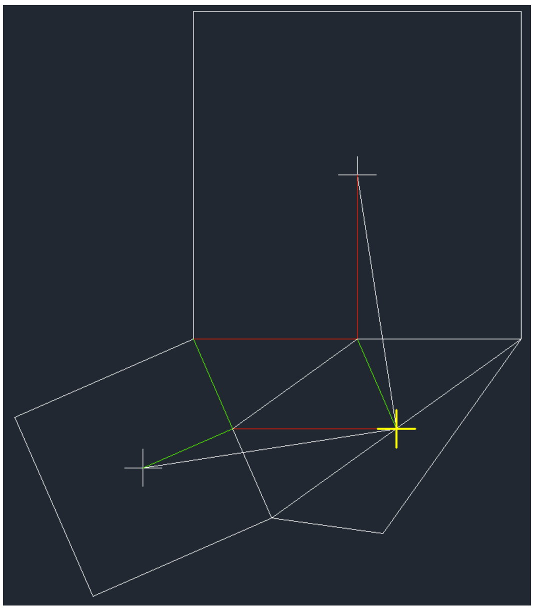


Fig. 2

Nota aclaratoria: Todas las figuras están dibujadas en un único plano.

La Fig. 2 destaca el cuadrilátero de partida en el que se ha trazado una diagonal conservando los dos cuadrados cuyos centros quedan a la izquierda de dicha diagonal, evitado los otros dos cuadrados. Asimismo se ha trazado el triángulo que une los puntos medios de los lados del triángulo resultante de dividir mediante la diagonal el cuadrilátero de partida (recordar el teorema de Tales). Se resalta asimismo (en amarillo) el punto medio de la diagonal trazada.



En la Fig. 3 se han añadido a la 2 los cuatro segmentos necesarios para crear los dos nuevos triángulos obtusángulos que resultan ser congruentes entre sí, porque:

-Los dos ángulos obtusos son iguales al tener sus dos lados, respectivamente, perpendiculares entre sí (ver segmentos rojos y segmentos verdes).

-Por otra parte los tres segmentos verdes son iguales; otro tanto ocurre con los rojos.

-Ello significa que los lados mayores de ambos triángulos obtusángulos (en blanco) también son iguales.

-En estas condiciones, como los lados tanto verdes como rojos de los triángulos obtusángulos son perpendiculares, sus lados blancos también lo serán.

Fig. 3

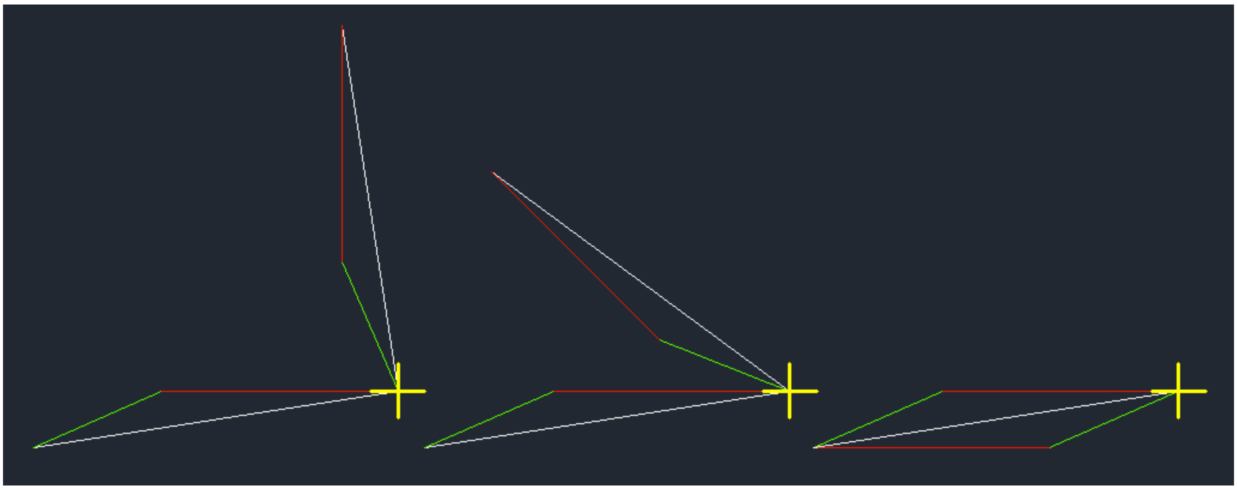


Fig. 4

La imagen a la izquierda en la Fig. 4 es la extracción de los dos triángulos obtusángulos de la 3. A continuación se ve cómo el triángulo erecto se somete a un giro antihorario de 90 ^{0} para mostrar, al final, que los tres lados de esos dos triángulos son iguales y perpendiculares.

En la Fig. 5 se muestra cómo se ha hecho la misma maniobra que en la 3 pero, en esta ocasión para obtener los otros dos nuevos triángulos obtusángulos asimismo congruentes, asociados a los dos cuadrados que faltaban en la Fig. 3. Como en el resto de las imágenes, se destaca en amarillo el punto medio de la diagonal del cuadrilátero de partida.

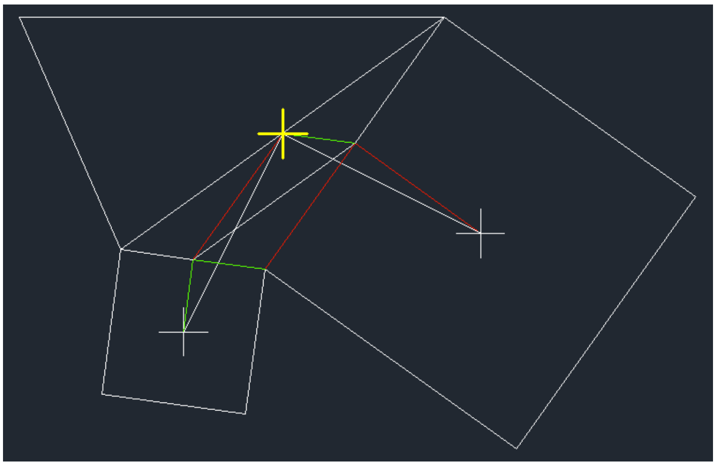


Fig. 5

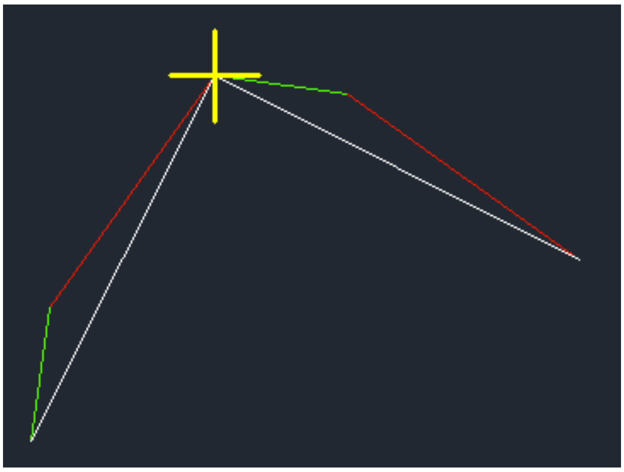


Fig. 6

La Fig. 6 es una extracción de la pareja de triángulos congruentes mostrados en la 5.

La Fig. 7 muestra en su posición real a las dos parejas de triángulos obtusángulos congruentes que tienen como único punto común el punto medio de la diagonal del cuadrilátero de partida que se ha venido utilizando.

La Fig. 8 recoge los cuatro lados mayores (blancos) de los triángulos de la Fig. 7.

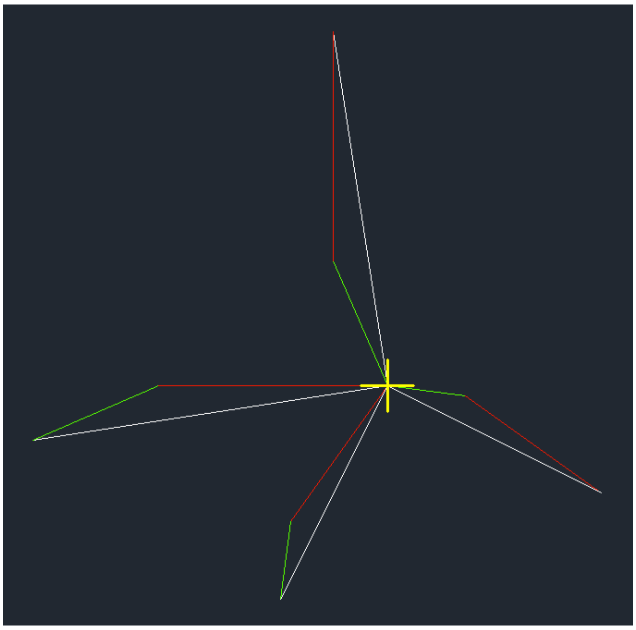


Fig. 7

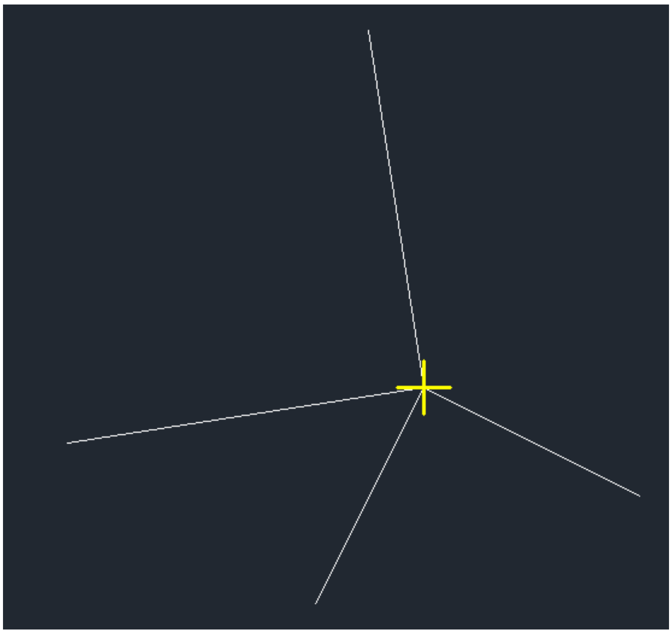


Fig. 8

La Fig. 9 muestra los centros de los cuatro cuadrados (en blanco) y en amarillo, el punto medio de la diagonal del cuadrilátero de partida que hemos venido usando. La cruz que aparece ahora es la misma que se veía en la Fig. 1

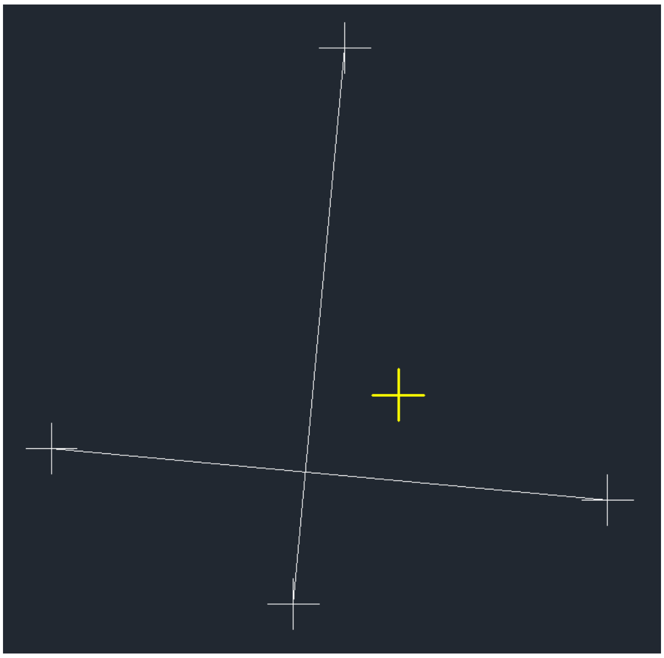


Fig. 9

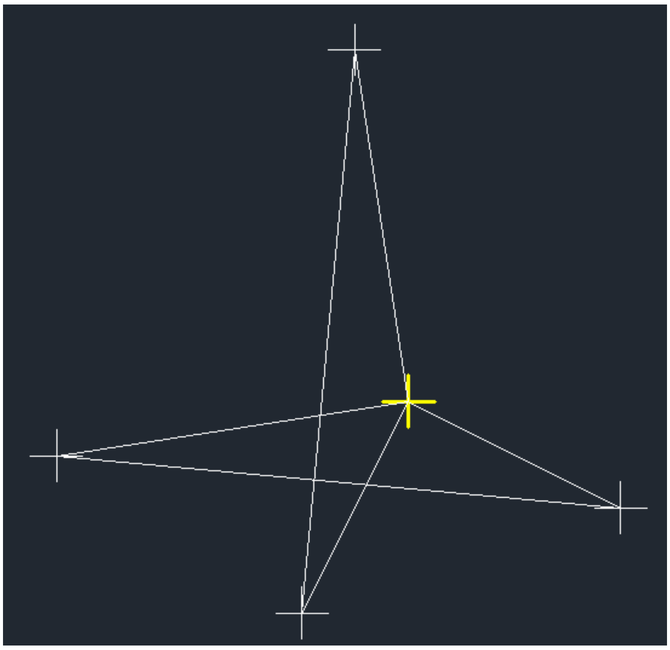


Fig. 10

La Fig. 10 resulta de superponer la 8 sobre la 9.

Rastreando el procedimiento seguido para llegar a la Fig. 10 se ve cómo han surgido en ésta los dos triángulos obtusángulos que son congruentes y distintos de todos los demás que han aparecido antes. En dicha Fig. 10 se puede observar cómo los lados mayores de dichos triángulos son perpendiculares y de igual longitud, como se quería demostrar.

---oooOooo---

Una coda con dos corolarios.

Veamos la Fig. 11 que resulta ser una mezcla de las 1 y 2: De la 1 se ha hecho desaparecer el cuadrado menor y, el que está a su derecha, se sustituye por otro de lado igual a la diagonal de la Fig. 2; con ello el cuadrilátero de partida queda convertido en un triángulo de partida. Se conserva el punto amarillo que ahora es el punto medio del nuevo lado del triángulo de partida (la antigua diagonal del cuadrilátero de partida anterior).

De la Fig. 2 se conserva el triángulo de los puntos medios de los lados del nuevo triángulo.

<u>Corolario 1</u>

En la misma Fig. 11 se une el punto amarillo con los dos blancos resultando que esos dos nuevos segmentos son iguales y perpendiculares.

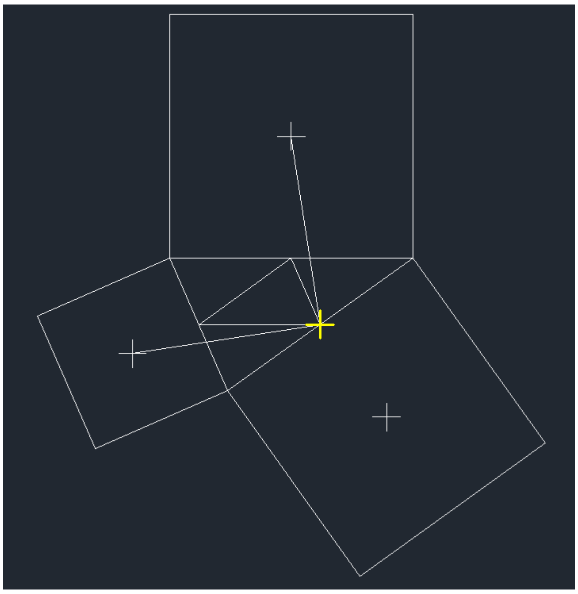


Fig. 11

En efecto, en la Fig. 12 aparecen dos triángulos obtusángulos congruentes de lados perpendiculares e iguales.

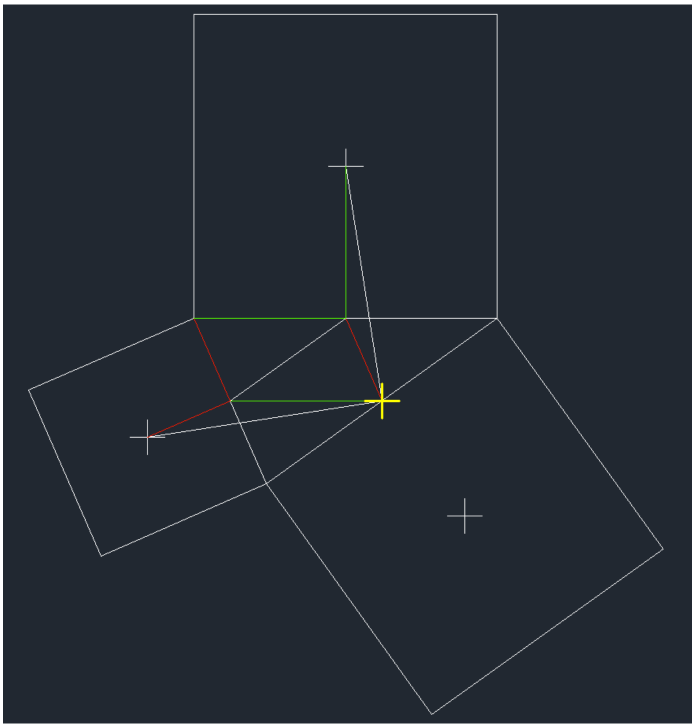
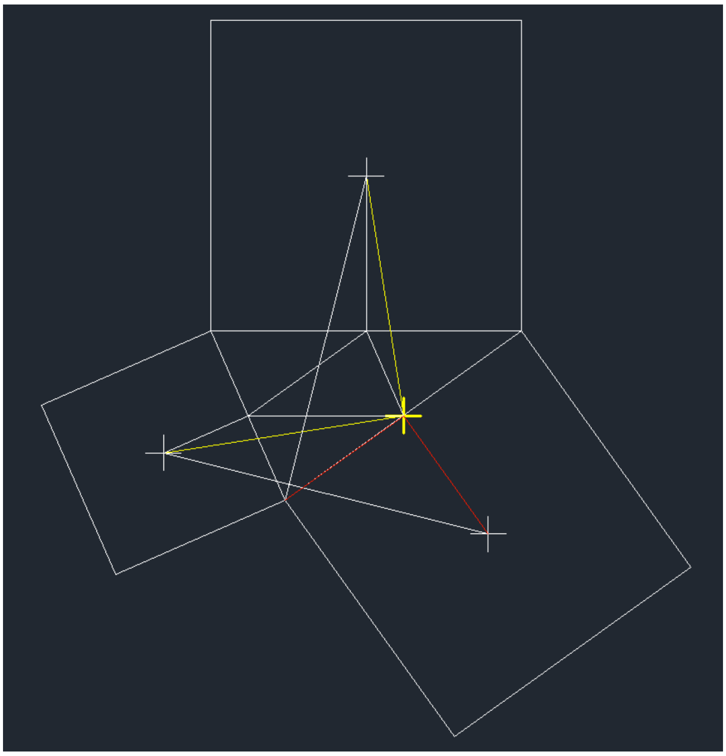


Fig. 12

Corolario 2



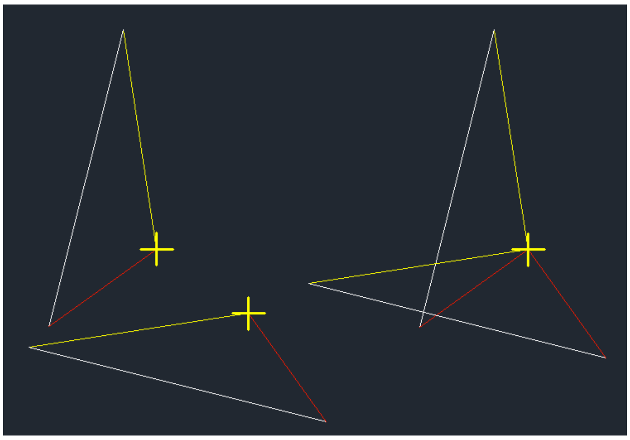


Fig. 14

Fig. 13

La Fig. 13 es la 11 a la que se han añadido, fundamentalmente, estos dos segmentos: El que une los centros de los dos cuadrados inferiores y el que une el centro del cuadrado superior con el vértice inferior del triángulo de partida.

El corolario 2 declara que esos dos segmentos son iguales y perpendiculares.

En efecto: De la Fig. 13 se ha extraído para la 14 la pareja de triángulos obtusángulos que se muestran en esta última. A la izquierda con sus vértices amarillos separados para mayor claridad y a la derecha coincidentes tal como están en la realidad de la Fig. 13.

Según el corolario 1, los triángulos de la pareja de la Fig. 14 son congruentes, así que el corolario 2 queda demostrado.

---oooOooo---

Generalización del teorema de Van Aubel referido a composiciones de sólo cuadrados. Se conserva el resultado de igualdad de los segmentos rojos y de su perpendicularidad (Figs. 15, 16 y 17).

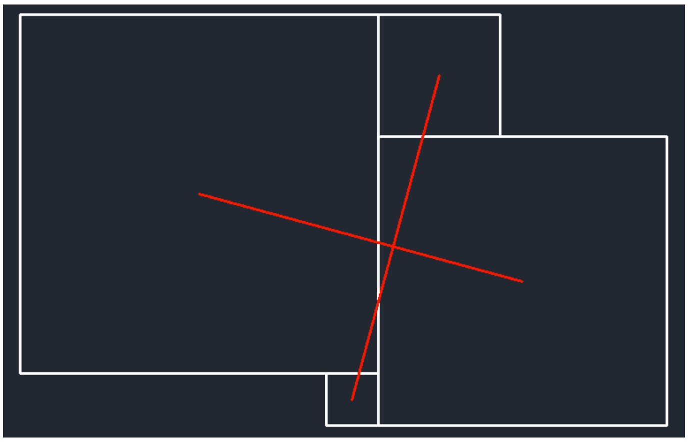


Fig. 15

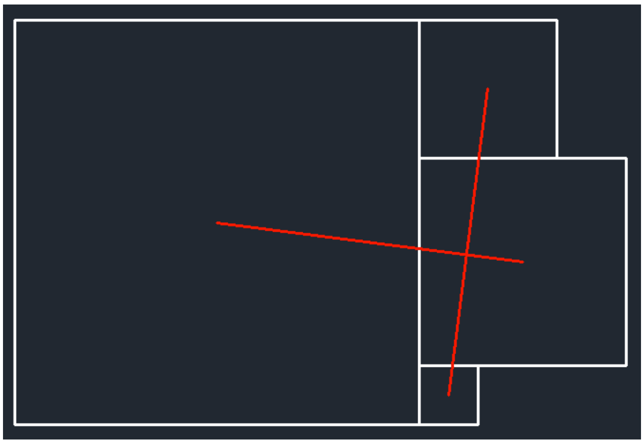


Fig. 16

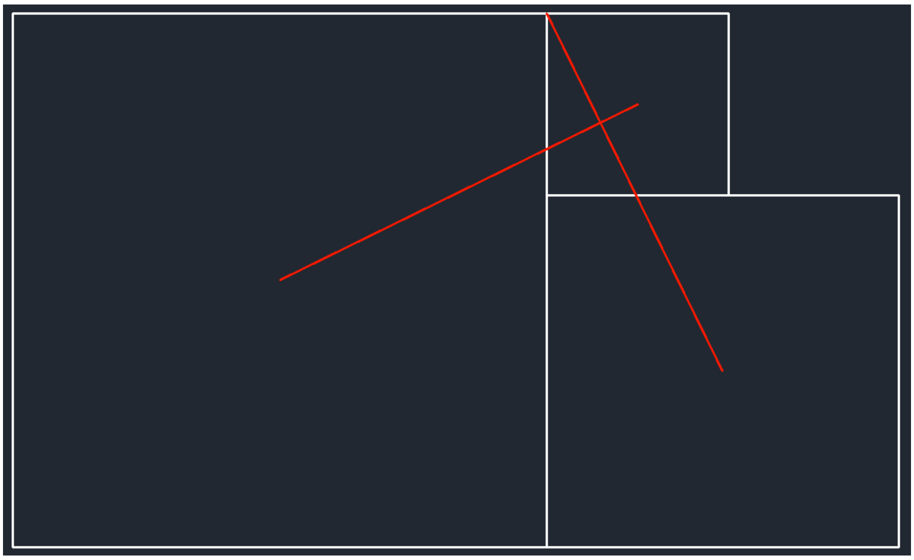


Fig. 17

---oooOooo---