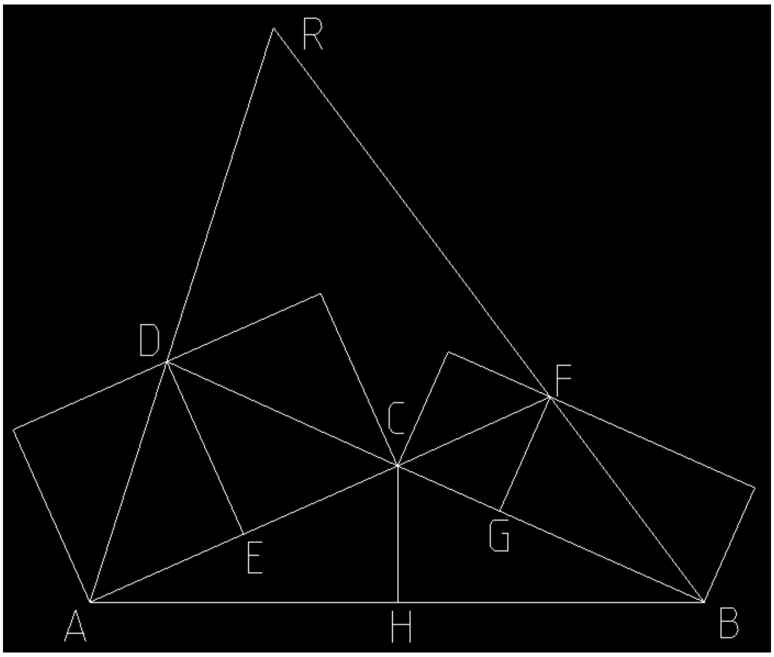
ProbCevianas

Un triángulo cualquiera de vértices A, B, y R, es dividido por dos cevianas en cuatro regiones, tres son triángulos y la cuarta es un cuadrilátero. La región que tiene como lado uno de los lados del triángulo mide 4 unidades, las otras dos triangulares miden respectivamente 3 y 2 unidades. Se pide calcular el área de la cuarta región cuadrilátera.

SOLUCIÓN

Ceviana es una recta cualquiera que en un triángulo va desde un vértice al lado opuesto. Sus alturas y medianas, por ejemplo, son cevianas.

Fig. 1



Empezaremos a construir el triángulo ABR de abajo arriba comenzando por dibujar el triángulo isósceles de base AB = 6 unidades lineales, altura CH= 1,3333 y área 4 (unidades cuadradas). Ver Fig. 1.

Prolongamos sus lados iguales para que determinen las dos cevianas BD y AF del enunciado.

Sobre su lado AC como base = 3,2829 se construye el rectángulo de altura DE = 2 × 3 / 3,2829 = 1,8276. Así, el rectángulo tendrá de área 6 y el triángulo ADC , 3.

Análogamente, sobre CB = 3,2829 se construye el rectángulo de altura FG = 2 × 2 / 3,2829 = 1,2184. Así el rectángulo tendrá de área 4 y el triángulo BFC, 2.

De esta forma hemos conseguido el triángulo ABR con sus dos cevianas AF y BD que se cortan en C de tal manera que RJ sea la tercera ceviana que, concurriendo con las otras en C determina la igualdad (teorema de Ceva, FIG.2)

$$\frac{RD}{DA}\times\frac{AJ}{JB}\times\frac{BF}{FR}=1$$

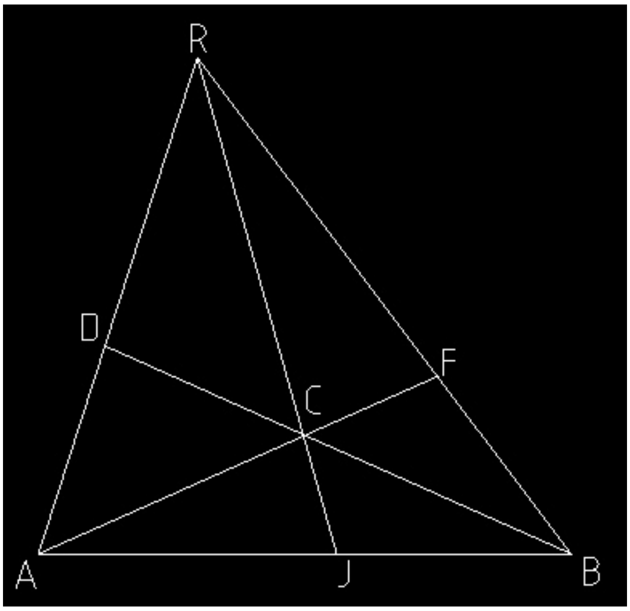


Fig. 2

El área cuadrilátera buscada (RDCF) será, en unidades cuadradas = (RAB) – [(DAC) + (CFB) + (ACB)]

A triángulo ABR construido, tenemos la Fig.2. Veamos en la 1 la forma de encontrar más información.

<CBH = < CAH = arc tg (CH / HB) = arc tg (1,3333 / 3) = 23,9619º

<FCG = 2(<CBH) = 47,9239º

FG / CG = tg 47,9239 = 1,1076

CG = FG / 1,1076 = 1,2184 / 1,1076 = 1,1

GB = CB – CG = 3,2829 – 1,1 = 2,1829

<FBG = arc tg (FG / GB) = arc tg (1,2184 / 2,1829) = 29,1683º

<RBA = <CBH + <FBG = 23,9619 + 29,1683 = 53,1302

Operando de forma semejante obtenemos:

<RAB = 72,21º

Ya tenemos definido el triángulo RAB por su base y sus dos ángulos adyacentes. De esa definición resulta que (RAB) tiene un área de 16,8 unidades cuadradas.

(DAC) = 3
(CFB) = 2
(ACB) = 4

(RDCF) = 16,8 – (3 + 2 + 4) = 7,8 unidades, que es el resultado buscado.

DE OTRA FORMA (Fig. 2)

Partiendo de la ecuación que justifica el teorema de Ceva y haciendo
X = (RDC)
Y = (RCF)
Tenemos:

$$\frac{RD}{DA} = \frac{(RDC)}{(DCA)} = \frac{(RDB)}{(DAB)} = \frac{(RDB) - (RDC)}{(DAB) - (DCA)} = \frac{RCB}{ACB} = \frac{Y + 2}{4}$$

$$\frac{RD}{DA} = \frac{X}{3}$$

4X = 3Y + 6

$$\frac{RF}{FB} = \frac{(RCF)}{(FCB)} = \frac{(RAF)}{(FAB)} = \frac{(RAF) - (RCF)}{(FAB) - (FCB)} = \frac{RCA}{ACB} = \frac{X + 3}{4}$$

$$\frac{RF}{FB} = \frac{Y}{2}$$

2X + 6 = 4Y

Resolviendo el sistema, queda:

8Y – 12 = 3Y + 6

Y = 18 / 5 = 3,6

X = 4,2

SOLUCIÓN
X + Y = 7,8