Prob Diagonales

Dado un polígono regular convexo de n lados, determinar de cuántas maneras diferentes se puede dividir en triángulos según sus diagonales, sin que éstas se corten.

SOLUCIÓN

Empezaremos por las soluciones facilitas.

Para el triángulo (n = 3). Como no tiene diagonales propiamente dichas (sus lados parecen diagonales porque también unen dos vértices), se puede cortar el triangulo a lo largo de cualquiera de sus lados dejándolo todo él a un lado; es decir, sólo hay una, *esa manera de cortarlo* (Fig. 1).

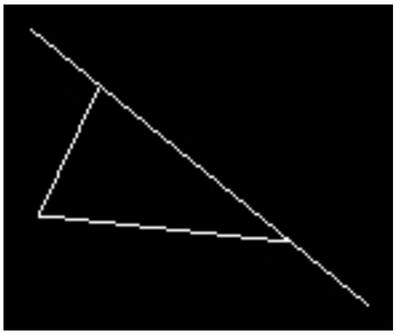

Fig. 1

Fig. 2

Cuadrado (n = 4, Fig. 2). Como se ve, sólo hay dos maneras de cortarlo.

Pentágono (n = 5, Fig. 3). Aquí se ven las cinco maneras posibles.

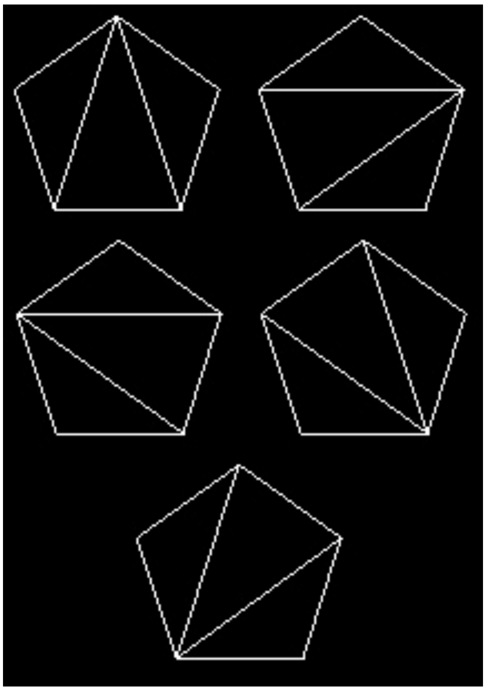

Fig. 3

Continuemos con el hexágono. Esperemos que la solución, si no tan facilita, sea al menos fácil. Pues pruébelo usted mismo.

Le voy a dar una pista orientativa: Un eneágono da de sí para **429** maneras de cortarlo según se exige.

En 1751 Euler le planteó este famoso problema a Goldbach mientras reconocía: “El proceso de inducción que utilicé para resolverlo resultó bastante laborioso”.

Y el matemático H. Dörrie (100 Great problems of elementary Mathematics) dice de él: “el enorme interés de este problema estriba en que, a pesar de su apariencia inocua, implica muchas dificultades, como muchos lectores descubrirán con sorpresa”.

La fórmula de Euler da la cantidad buscada E_n = (2 * 6 * 10 *** (4n - 10)) / (n - 1)!

Se trata de un cociente cuyo numerador tiene (4n - 10) como término general y (n – 2) factores, el primero de los cuales se corresponde con n = 3, ya que el resultado se acoge a la recurrencia de los polígonos empezando por el de tres lados y siguiendo sucesivamente por los de cuatro, cinco, etc.

Veamos esta fórmula aplicada al eneágono, en la Fig. 4:

4 * 3 – 10 = 2
4 * 4 – 10 = 6
4 * 5 – 10 = 10
4 * 6 – 10 = 14
4 * 7 – 10 = 18
4 * 8 – 10 = 22
4 * 9 – 10 = 26

Fig. 4

n → 3 4 5 6 7 8 9 → siendo el término general (4n - 10)

$$E_9 = \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14 \times 18 \times 22 \times 26}{8!} = 429$$

Volvamos al hexágono, también con la fórmula de Euler:

$E_6 = (2 * 6 * 10 * (4 * 6 - 10)) / (6 - 1)! = 14$

Y ya, puestos, veamos los resultados para triángulo, cuadrado y pentágono:

$E_3 = (4 * 3 - 10) / (3 - 1)! = 1$

$E_4 = 2 *(4 * 4 - 10) / (4 - 1)! = 2$

$E_5 = 2 * 6 (4 * 5 - 10) / (5 - 1)! = 5$

Veamos gráficamente las 14 maneras dadas por Euler para el hexágono. La Fig. 5 las muestra agrupadas en 3 bloques homogéneos: las tres diagonales que parten de cada uno de sus seis vértices; las que forman un par de triángulos equiláteros; las que tienen un par de diagonales paralelas.

Nos queda reseñar, por fin, la relación entre los números de Euler E_n que acabamos de ver, con los C_n que desarrolló un siglo después el matemático Catalán.

Éstos se obtienen como

$$C_n = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!^2}$$

La relación entre E_n y C_n es:

$E_n = C_{n-2}$

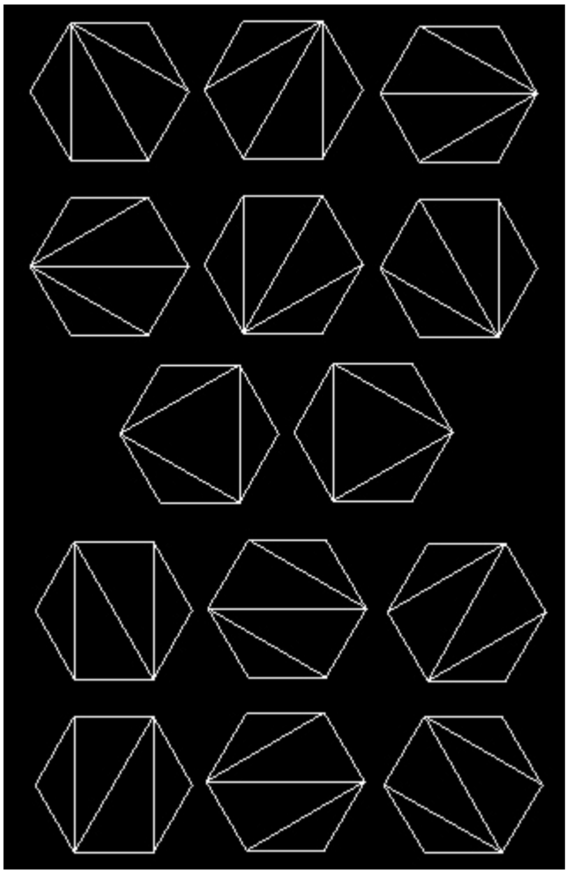

Fig. 5

Lo comprobamos para el hexágono y para el eneágono:

$C_4 = (1 / 5)\ (2\times4)! / (4!)^2 = 14 = E_6$

$C_7 = (1 / 8)\ (2\times7)! / (7!)^2 = 429 = E_9$