OTRAS ESFERAS GEODESICAS

Cualquiera de los 5 sólidos platónicos es inscribible en una esfera que da asiento a todos los vértices de cada poliedro. Así, el tetraedro se parece a una esfera aunque sólo tiene 4 puntos *esféricos*. El dodecaedro tiene 20; éste se parece más a una esfera, pero no demasiado: rueda poco y mal.

Truncando los poliedros platónicos, Arquímedes consiguió que éstos rodaran mejor. Tal es el caso de su icosaedro truncado que tiene 60 vértices. Se consigue rebanando cada uno de los 12 vértices del icosaedro regular de manera que desaparecen todos ellos, pero al hacerlo, aparecen 5 nuevos por cada uno eliminado: los vértices, además de serlo del poliedro, lo son de una pirámide pentagonal: el corte produce un pentágono bajo cada vértice desaparecido.

El truncamiento ha de producirse con un plano normal a la altura de esa pirámide por un punto que diste del vértice de ella 1 / 3 de dicha altura. Al truncar según sus tres vértices, el triángulo equilátero de cada cara lateral de la pirámide (y cara del icosaedro) se convierte en un hexágono.

El resultado es que donde había un vértice aparece un pentágono rodeado de 5 hexágonos. El total de caras es 32: 12 pentágonos (uno por cada vértice) más 20 hexágonos (uno por cada cara).

Los lados de los pentágonos y de los hexágonos (todos regulares) son iguales: son las 90 aristas del icosaedro truncado (60 vértices + 32 caras – 2 = 90 aristas, según Euler).

Para facilitar una gran construcción pueden triangularse tanto los hexágonos como los pentágonos. Los triángulos del hexágono son equiláteros y los del pentágono, isósceles (el radio de un pentágono es menor que su lado: $r \approx 0{,}85\ l$).

Esos polígonos se pueden incluso piramidar para obtener 32 nuevos vértices (uno por cada cara) situados en la esfera circunscrita al icosaedro truncado.

Esta idea es la que yo voy a desarrollar, no a partir de un icosaedro truncado, sino de un dodecaedro y de un icosaedro regulares, respectivamente. Con su maniobra de truncamiento, Arquímedes esferificó los poliedros platónicos a base de quitarles materia. Yo voy a hacer lo contrario: voy a esferificar un dodecaedro y un icosaedro regulares aumentándoles materia.

DODECAEDRO

Para aumentar el parecido de un dodecaedro regular con una esfera, imaginemos a aquel inscrito en su esfera. Unamos el centro (de esfera y dodecaedro) con el centro de una cara del poliedro prolongando esta línea hasta que toque en la esfera. El punto obtenido así será común a la esfera y a un nuevo poliedro que se creará asentando sobre la cara del dodecaedro una pirámide pentagonal de vértice el punto obtenido en la esfera.

Haciendo esta operación con las 12 caras del dodecaedro tenemos un nuevo poliedro de 32 vértices: Sus 20 originales más los 12 nuevos que se añaden.

Se puede comprobar que este nuevo poliedro rueda mucho mejor que el dodecaedro. La Fig. 1 lo representa mostrando la relación que también se da en él entre pentágonos y hexágonos. Es una relación distinta a la descrita para el icosaedro truncado, y muy particular. Aquí, pentágonos (amarillos) y hexágonos (verdes) están imbricados.

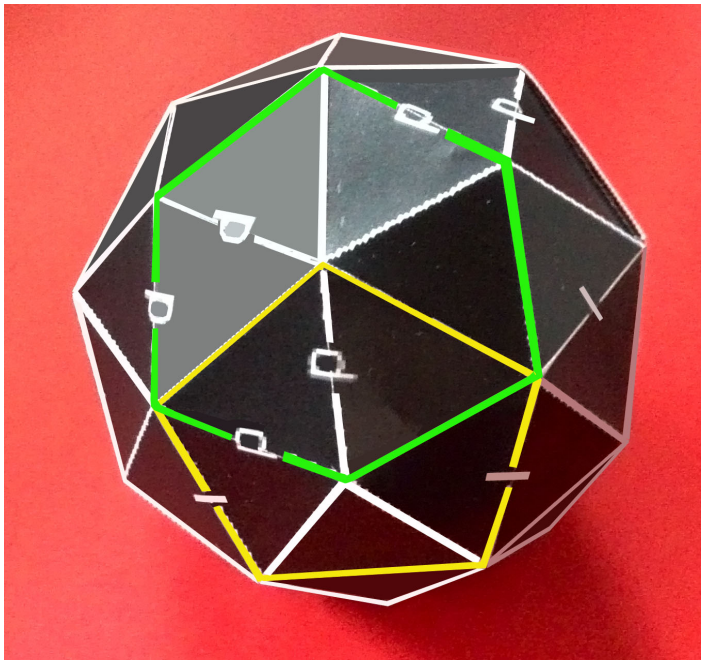

Fig. 1

Los pentágonos son regulares de lado l y radio p (ver Fig. 4). Están triangulados en 5 triángulos isósceles iguales.

Los hexágonos son irregulares. Sus 6 lados iguales miden p. Sus radios miden, alternativamente, l y p. Sus 6 triángulos isósceles (lpp) son iguales pero están dispuestos en alternancia de *simetrías a la redonda*.

Cuando hablo de pentágonos y hexágonos ya se ve que propiamente me estoy refiriendo a las vistas en planta que ofrecen sus respectivas pirámides.

La pirámide pentagonal es regular; su base es el pentágono–cara del dodecaedro y su altura, a calcular, es la diferencia entre el radio de esfera–dodecaedro y la distancia del centro del poliedro al de una de sus caras.

La Fig. 2 muestra la cara de un dodecaedro y el desarrollo de éste. La relación entre el radio R del dodecaedro resultante y el lado de su cara (l) es: R / l = 1,4012586.

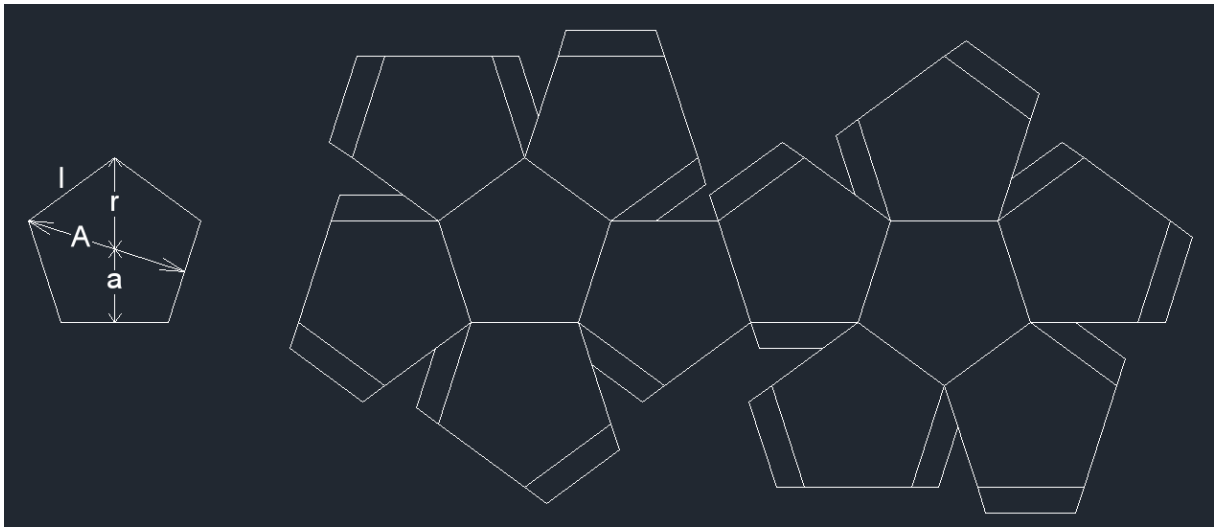

Fig. 2

NOTA
Cuando dé cifras de relación sin explicar su origen, hay que referirse a los cálculos desarrollados en este enlace:

http://www.caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/Extraordinario%202000.pdf

y dentro de él, en las págs. 191 (207)/ 195 (211).

Las magnitudes se dan en función del lado l del poliedro.

En la cara pentagonal de la izquierda de dicha Fig. 2 se tiene:

r = radio = 0,8506508 l
a = apotema = 0,6881909 l
A = gran apotema = r + a = 1, 5388417 l

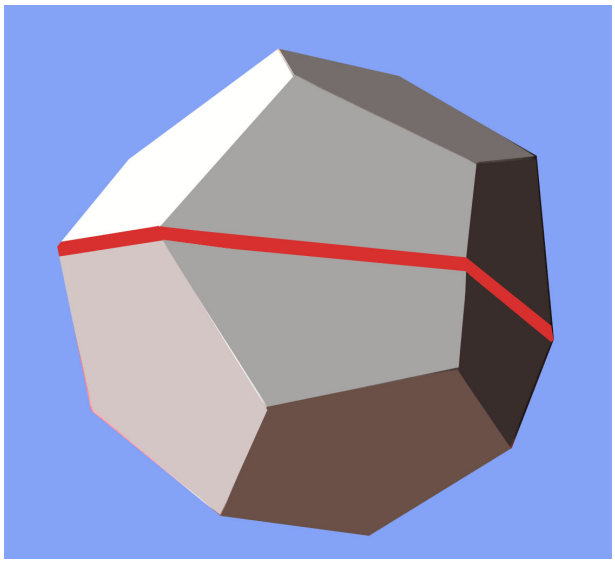

Fig. 3

La Fig. 3 es un curioso corte diametral del dodecaedro consistente en un hexágono irregular de lados AAlAAl. A la izquierda se ve el poliedro mostrando en rojo la parte vista del corte y a su derecha, el corte propiamente dicho.

Esta figura del corte se ha podido dibujar gracias a que antes se han calculados los ángulos E (épsilon en el enlace) y G (gamma en el enlace). Sus valores resultaron ser:

E = 116,56505 º
G = 121,71748 º

Así se ha dibujado el trapezoide VEGV de base VV; el otro que queda a su derecha se obtiene girando 180º el anterior. VV es el diámetro, y su punto medio O el centro, respectivamente, del dodecaedro y de su esfera circunscrita.

La curiosidad del corte evidencia que las intersecciones AA no son puntos de la esfera: son el punto medio de un lado del dodecaedro. En cambio, sí son puntos de la esfera las intersecciones Al.

Asimismo se puede observar que en una gran apotema A, W es el centro del pentágono-cara, y VW su radio r.

Al final resulta que WX es la altura de la pirámide pentagonal a añadir que buscamos, siendo

$WX = OX - OW$

$WX = R - OW$

$R = 1{,}4012586\ l$

$OW = \sqrt{(R^2 - r^2)} = l\sqrt{(1{,}4012586^2 - 0{,}8506508^2)} = 1.1135165\ l$

$WX = (1{,}4012586 - 1.1135165)\ l = 0{,}2877421\ l$

El lado de la pirámide buscada será VX = p (así es llamada en su desarrollo, Fig. 4):

$VX = \sqrt{(WX^2 + WV^2)} = l\sqrt{(0{,}2877421^2 + r^2)} = l\sqrt{(0{,}2877421^2 + 0{,}8506508^2)} = 0{,}897999\ l$

La pirámide en cuestión tendrá de base el pentágono de una cara del dodecaedro y sus cinco caras laterales serán triángulos isósceles de base l y lados iguales VX.

La Fig. 4 es su desarrollo. Hay que insistir en que los triángulos de la pirámide, tal como se demuestra, no son equiláteros, aunque pueda parecer que lo son.

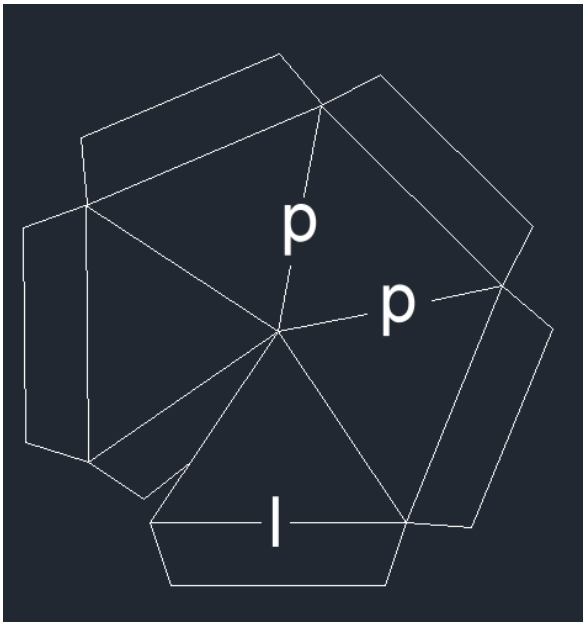

Fig. 4

La Fig. 1, antes mostrada, es el nuevo poliedro resultante como esfera geodésica. Obsérvese en ella cómo cada nuevo vértice refleja el pentágono (de lado l) inscrito en la esfera, porque fue cara en el dodecaedro. Y cómo los primitivos vértices del dodecaedro (los vértices del anterior pentágono) son el centro del hexágono tan peculiar antes descrito.

ICOSAEDRO

NOTA

Aunque ahora se empleen las mismas letras que antes se emplearon para el dodecaedro, en este nuevo apartado se referirán sólo al icosaedro.

Un icosaedro puede ser considerado como un conjunto de 20 pirámides triangulares equiláteras adosadas, con sus vértices comunes reunidos en el centro del poliedro (y de su esfera circunscrita). Tienen apariencia escasamente alargada. Debo reconocer que esta pirámide alargada y la que luego llamaré chata no están representadas de forma muy convincente en las figuras que siguen. Es la servidumbre para hacer ver lo que de ellas se necesita.

Esta pirámide es la de la Fig. 5 con vértice O (centro del poliedro). Su base es el triángulo equilátero rojo de lado l y sus aristas laterales son los radios R del poliedro. El centro de la cara es el punto rojo de la Fig. 6. En la Fig. 7 se ven unidos ese centro de cara con el centro O del icosaedro. El segmento resultante B es la altura de la pirámide alargada.

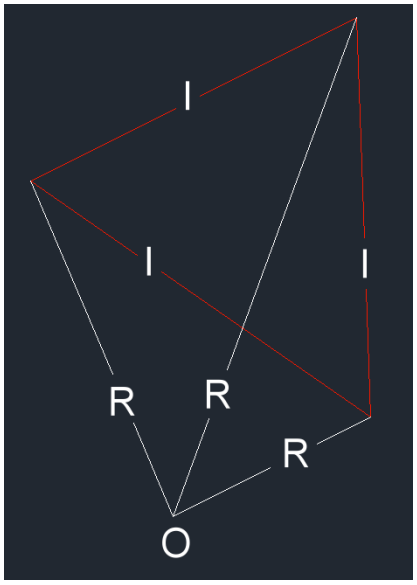

Fig. 5

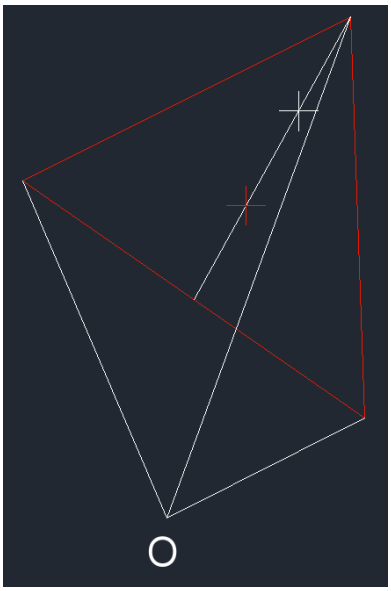

Fig. 6

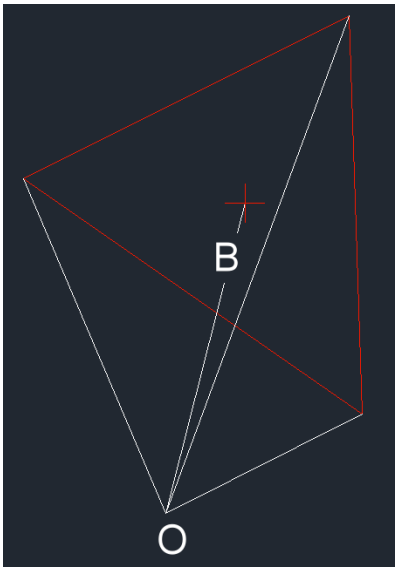

Fig. 7

En el enlace indicado al principio se ha calculado el radio R del icosaedro que vale, en función de su lado:

R = 0,9510565 l

Ya se ve que el radio del icosaedro es un poco menor que su lado.

Si recordamos que en el dodecaedro es su Radio / su lado = 1,4012586, resulta que inscribiendo en esferas iguales un icosaedro y un dodecaedro, el lado del icosaedro resulta ser 1,4012586 / 0,9510565 = 1,4733705 veces más grande que el del dodecaedro (casi vez y media).

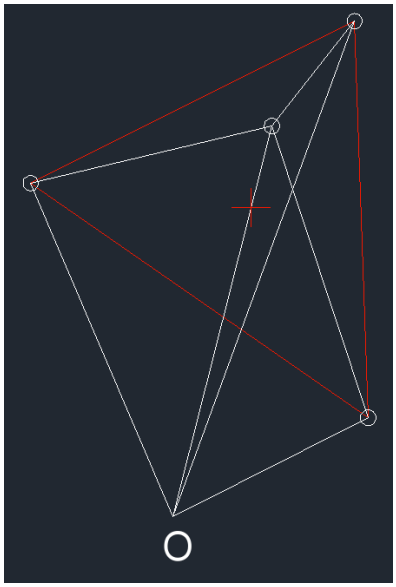

Fig. 8

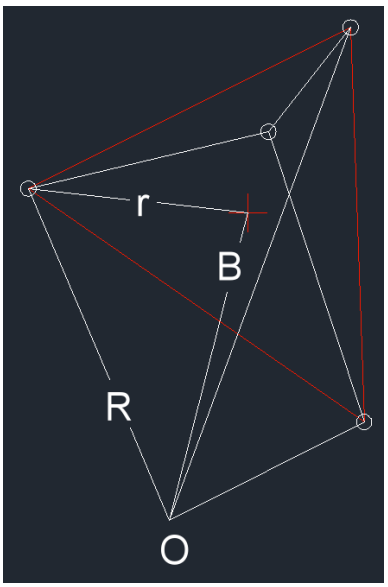

Fig. 9

Hagamos ahora lo mismo que hicimos antes con el dodecaedro, es decir, prolonguemos B hasta tocar la superficie de la esfera circunscrita: la nueva longitud total obtenida será R. En la Fig. 8 se ven, en circulitos, cuatro puntos de la esfera circunscrita: los tres vértices de la cara roja y el nuevo punto que acabamos de obtener.

Se trata, en definitiva, de adosar a la pirámide de vértice O, y sobre su base triángulo-equilátera, y hacia fuera, otra pirámide chata de altura h igual a la diferencia que hay entre R y B.

Fig. 9: La altura de la pirámide alargada (B) es el cateto mayor de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es R y su cateto menor, el radio r del triángulo equilátero-cara del icosaedro. Será, pues:

$B^2 = R^2 - r^2$

Siendo $r = (\sqrt{3} / 3)\, l$

$r^2 = l^2 / 3$

$B^2 = 0{,}9510565^2\, l^2 - l^2 / 3 = 0{,}5711751\, l^2$

$B = 0{,}7557612\, l$

La altura de la pirámide chata h valdrá

$h = R - B = 0{,}9510565\, l - 0{,}7557612\, l = 0{,}1952953\, l$

Las caras de esa pirámide serán triángulos isósceles de base l y lados iguales a x. En la Fig. 10 se ve que x es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son r y h, de manera que tendremos

$x = \sqrt{(r^2 + h^2)} = \sqrt{(l^2 / 3 + 0{,}1952953^2\, l^2)} = 0.6094863\, l$

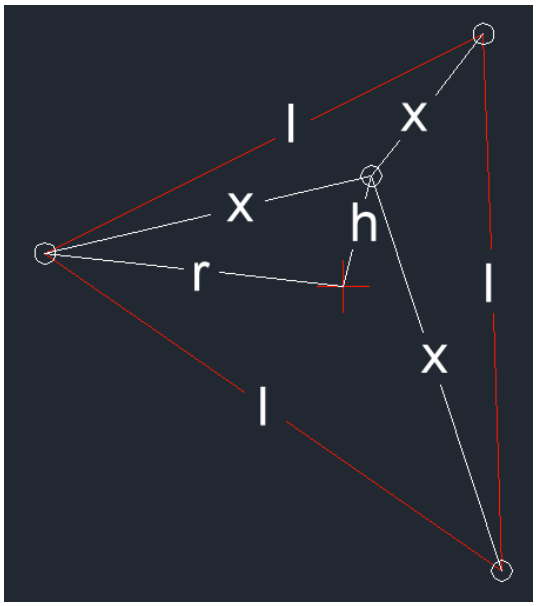

Fig. 10

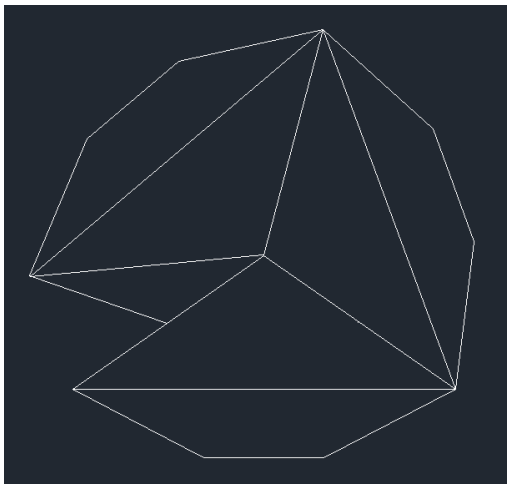

Fig. 11

La Fig. 11 es el desarrollo de la pirámide de Fig. 10. Y la Fig 12 es el poliedro resultante equivalente a la esfera geodésica basada en un icosaedro. En ella se puede apreciar un pentágono regular amarillo y un hexágono irregular verde que resulta ser semejante al ya visto en la Fig. 1 del dodecaedro geodésico. Ambos tienen iguales sus ángulos correspondientes.

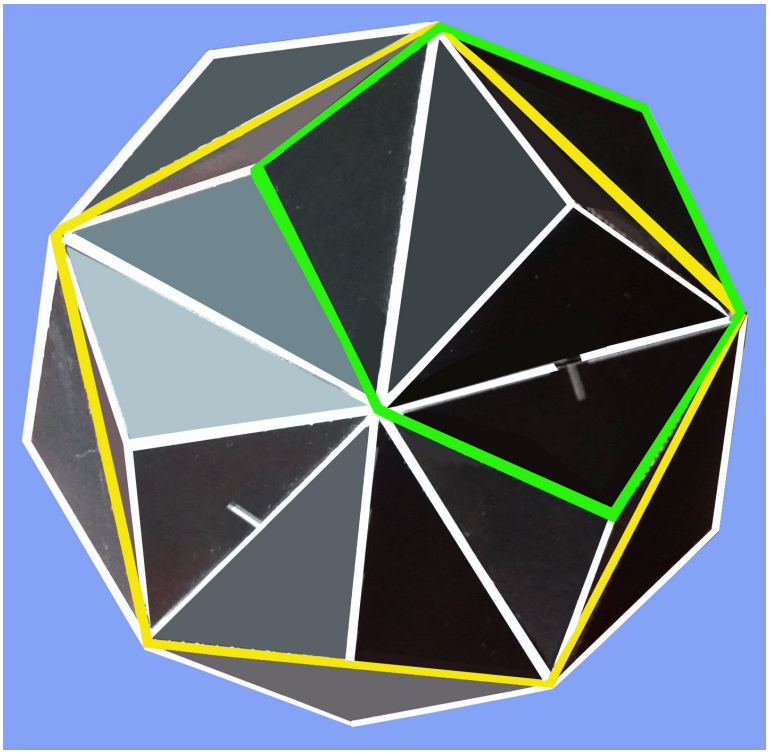

Fig. 12

En el cuadro siguiente se pueden comparar las características del icosaedro truncado y las del dodecaedro e icosaedro convexos y regulares, con las de los mismos poliedros geodésicos (1 y 2) que han resultado al final. Se ve que estos dos últimos tienen el mismo número de caras, aristas y vértices. Y que son bien superiores a los poliedros regulares en materia, precisamente, de cantidad de caras, aristas y vértices. Asimismo se pone de manifiesto que la suma de características de los dos poliedros geodésicos y del icosaedro truncado, es la misma: 60 +90 +32 = 182.

		CARAS	ARISTAS	VÉRTICES
	ICOSAEDRO REGULAR	20	30	12
	DODECAEDRO REG.	12	30	20
	ICOSAEDRO TRUNCADO	32	90	60
1	ICOSAEDRO GEODÉSICO	60	90	32
2	DODECAEDRO GEOD.	60	90	32

CODA Nº 1 (Semejanza de estos poliedros 1 y 2 con los estrellados)

En el enlace que daba al principio, págs. 211 (227) / 219 (235), trato de los 4 poliedros estrellados regulares que pueden existir según Euler.

El que yo llamo allí poliedro estrellado Nº 3, de especie épsilon = 3, tiene como base un dodecaedro regular convexo al que se le adosan, en cada cara, pirámides pentagonales regulares de altura 1,3763819 l. El poliedro 2 del cuadro tiene, en cambio, pirámides chatas de altura 0,2877421 l.

El que yo llamo allí poliedro estrellado Nº 4, de especie épsilon = 7 tiene como base un icosaedro regular convexo al que se le adosan, en cada cara, pirámides triangulares regulares de lado 1,618034 l. El poliedro 1 del cuadro tiene, en cambio, pirámides chatas de lado 0.6094863 l.

CODA Nº 2 (Un producto derivado)

Mientras trabajaba en todo esto, mi amigo Mariano me enseña el magnífico libro de mi conocido el inglés Paul Jackson titulado *TEXTURAS EN PAPEL, técnicas de diseño de superficies*. Lo compró en el Centro Niemeyer de Aviés y me lo enseñó por sospechar que sería de mi interés. Y lo era: como todo lo de ese autor.

A él lo conozco, en la distancia, desde su aportación al 2º Encuentro Internacional de la Ciencia del Origami y el Origami cientofico, de Otsu, Japón (1994; Universidad Seian de Arte y Diseño). Allí, Paul Jackson presentó la ponencia *One crease origami: less is* more, que me fascinó.

Después (creo que fue en 2011) tuve ocasión de comer con él, su mujer y su niña en El Escorial con motivo de la XIV Convención Papiroflexia AEP (Asociación Española de Papiroflexia).

Pues bien, como tenía un sobrante del papel especial que empleo en mis poliedros geodésicos, pensé ejecutar con él una pequeña muestra (Fig. 13) del plisado en espiga que se muestra en el libro de Paul Jackson (Página 93). Sobre ella voy a hacer unos comentarios.

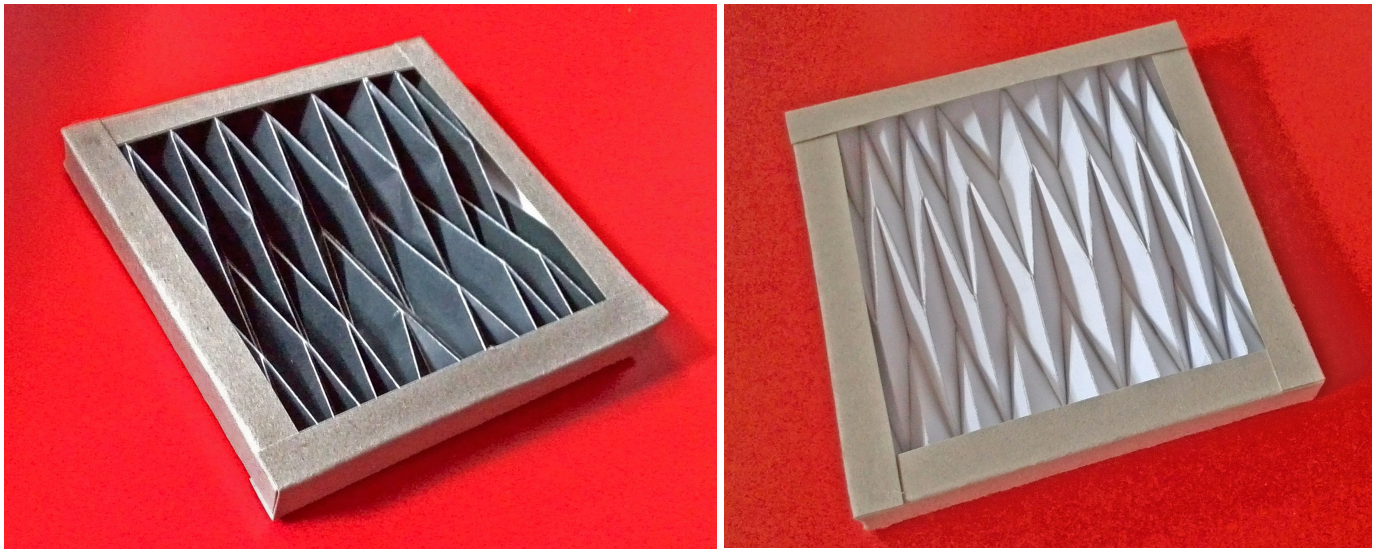

Fig. 13

Al plisado que nuestro autor llama “en herradura” yo prefiero llamarlo “en espiga” por el parecido con el *tejido en espiguilla*.

El papel que uso para los exteriores de los poliedros es un papel fotográfico en color, de gramaje 100 y color azul muy oscuro (blanco en el reverso; en la Fig. 13, el anverso está a la izquierda y el reverso a la derecha). Para obtener el blanco de las líneas de plegado, P. J recomienda pasar sobre ellas una lima de uñas para retirar el tinte del papel y dejar a la vista lo blanco del fondo. Hay que suponer que esta operación se hará presentando el modo monte sobre la superficie oscura, para todos los segmentos de pliegue.

Lo que hago en mi caso es dibujar con lápiz todas las líneas de plegado en el reverso blanco del papel utilizando una plantilla de espiga. Después repaso esas líneas con la punta de una tijera y una regla. Como es difícil saber a priori qué tramos de línea serán en monte o en valle, hago un plegado previo de todos los tramos en ambos sentidos. Sólo con esta operación todas los tramos plegados tanto en monte como en valle, vistos desde el lado oscuro de la superficie aparecen, a pieza acabada, según una fina línea blanca como consecuencia del mínimo desgarro producido en el plegado previo sobre la capa de tintura.

Otra cuestión. La figura de la referida página 93 muestra horizontalmente una línea en zigzag chato que no sirve sino para confundir al plegador, pues no puede ser línea de plegado. El truco que hay detrás de una figura tan bella es la existencia de unos romboides alargados que forman la espiga asentados sobre las largas líneas paralelas. La diagonal menor de un romboide lo divide en dos triángulos rectángulos iguales de manera que cada uno de ellos tiene su hipotenusa sobre una de las largas líneas paralelas y el vértice de su ángulo recto sobre la otra (su adyacente). La Fig. 15 es la 14 completamente aplastada mostrando que no existe línea de plegado en la diagonal menor del romboide.

Así se cumple la imprescindible condición requerida para que los plegados que confluyen en un nodo resulten aplastables, que es lo que se consigue en la Fig. 13. Ello es la expresión del teorema del incentro de Fushimi que dice:

> "Para producir aplastamiento en torno de un nodo, es condición necesaria (pero no suficiente) que los ángulos que tienen como vértice el nodo y como lados las líneas de plegado en él concurrentes sumen 180º tomados en orden alterno".

Del enunciado del teorema se derivan tres cosas:
-Lo del orden alterno implica que los ángulos que han de concurrir en un nodo lo serán en número par. De ser impar, alguna línea de plegado se desaprovechará.
-El número par es admisible en cualquier cuantía.
-La condición de suficiencia implica que en el aplastamiento no ha de producirse interferencia entre las caras aplastadas.

En la figura de la página 93 del libro de P. J los romboides aparecen atravesados por aquel zigzag chato que aparenta ser una línea de plegado que no puede existir. En cada nodo concurren 4 planos, no 6.

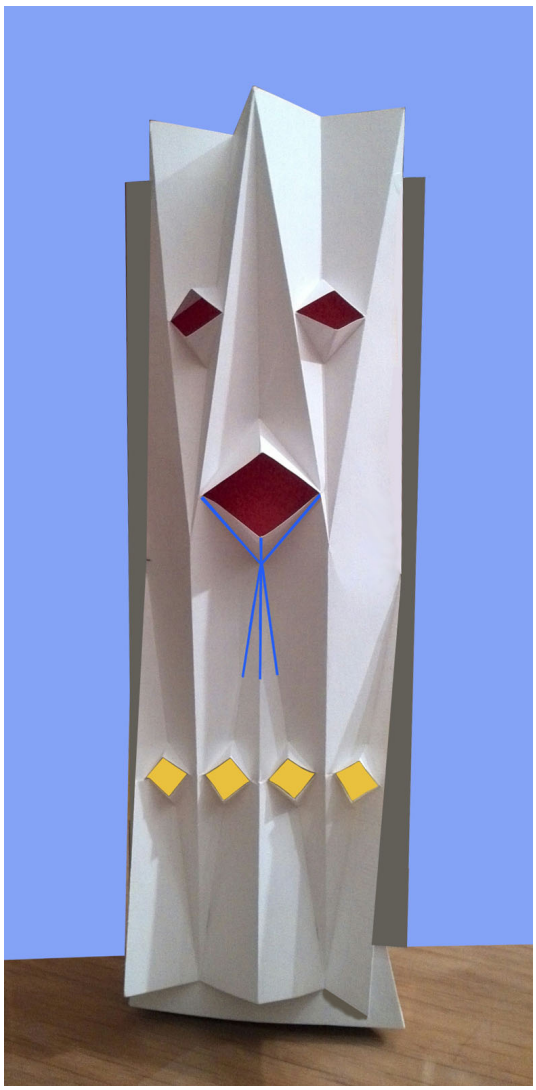

Fig. 14

La Fig. 14 se parece más a una chistorrreta que a un teorema. Yo no pretendía eso, pero el resultado es el que es.

Mi intención era aplicar a un relieve como el de las figuras 13 el recurso imaginativo y de singular repercusión estética de los *plisados cortados* que P. J desarrolla en la página 99 de su libro.

Y además, quería implicarlos en plegados aplastables de más de cuatro planos concurrentes. En esta Fig. 14 he resaltado en azul las 6 líneas de plegado que convergen en un nodo satisfaciendo las condiciones del teorema de Fushimi que se exigen para plegados aplastables.

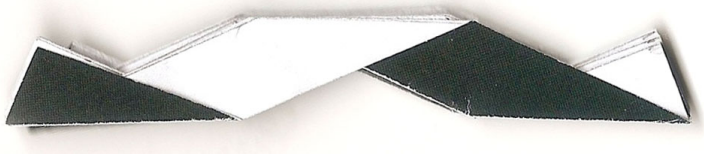

Fig. 15

CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández