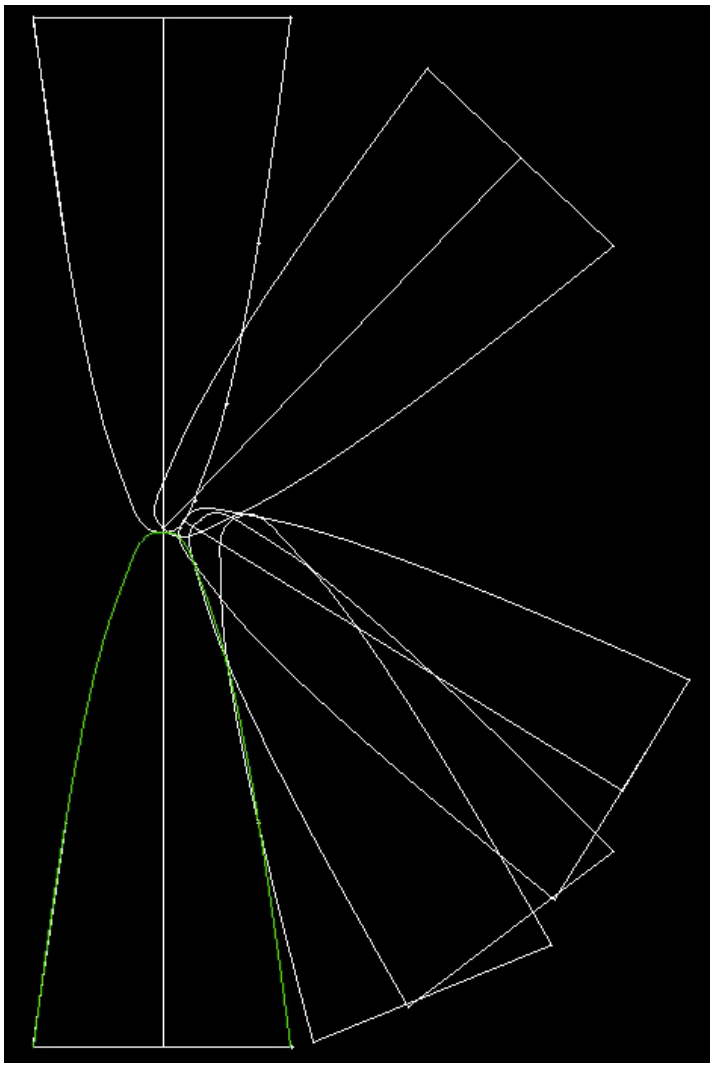
CAPRICHOS ingenieros

Jesús de la Peña Hernández

CISOIDE DE DIOCLES

DEMOSTRACIONES



En la Fig. 1 tenemos una parábola de la forma $y = x^2$ (en verde) y su simétrica; ambas tienen en común sus vértices y sus ejes, verticales.

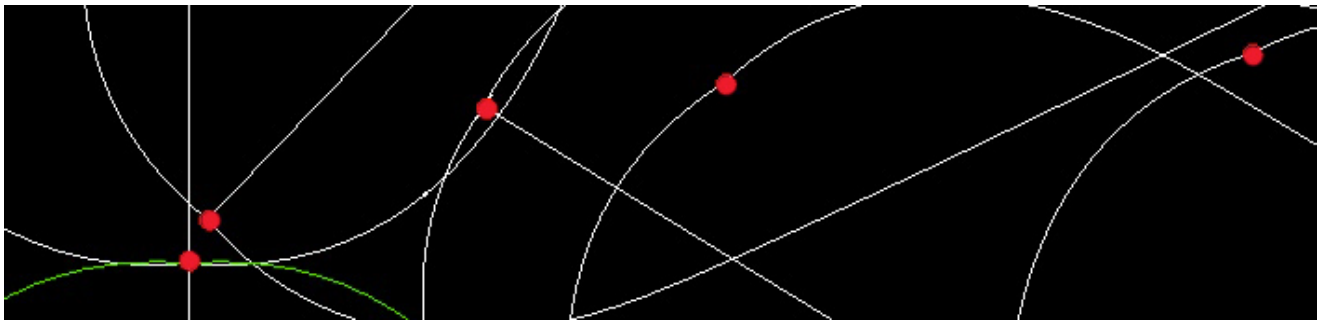
Se trata después de hacer rodar sin deslizamiento, la parábola superior sobre la inferior. El resultado es que el lugar geométrico del vértice de la parábola que rueda (la verde queda inmóvil), es una cisoide.

Como mi aplicación CAD no me permite hacer ese movimiento, he recurrido a una solución que si bien no es perfecta, resulta aceptable a efectos de describir las demostraciones que siguen.

La Fig. 2 es una extracción de la 1 en lo que concierne al lugar geométrico de los cinco puntos obtenidos (en rojo) que dan soporte a la cisoide.

Fig. 1

Fig. 2



LaFig. 3 es un plano cartesiano de origen O que coincide con el vértice común de las parábolas de la Fig. 1 en su situación de partida. En él están dibujados los cinco puntos de la cisoide que se obtuvieron antes (O es uno de ellos; su punto singular) y por los que se ha hecho pasar la curva cisoide (en rojo). La curva se completa con la simétrica de la rama trazada (se ve sólo su arranque).

Si el origen O es el primer punto de la cisoide, el último (el quinto) se ha obtenido cuando la rodadura de la parábola ya no podía avanzar más: se había llegado al tope. En su entorno habremos de trazar la asíntota de la cisoide, paralela al eje de abscisas.

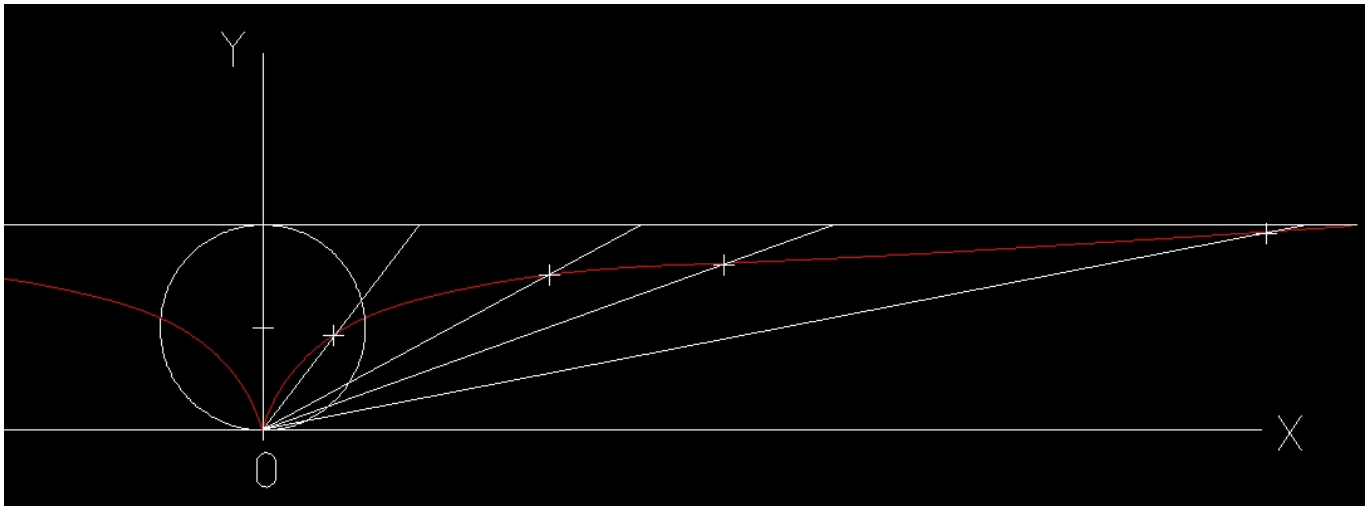


Fig. 3

Lo siguiente es trazar la circunferencia C que pasará por O y será tangente al eje de las X y a la asíntota. Tendrá de radio a.

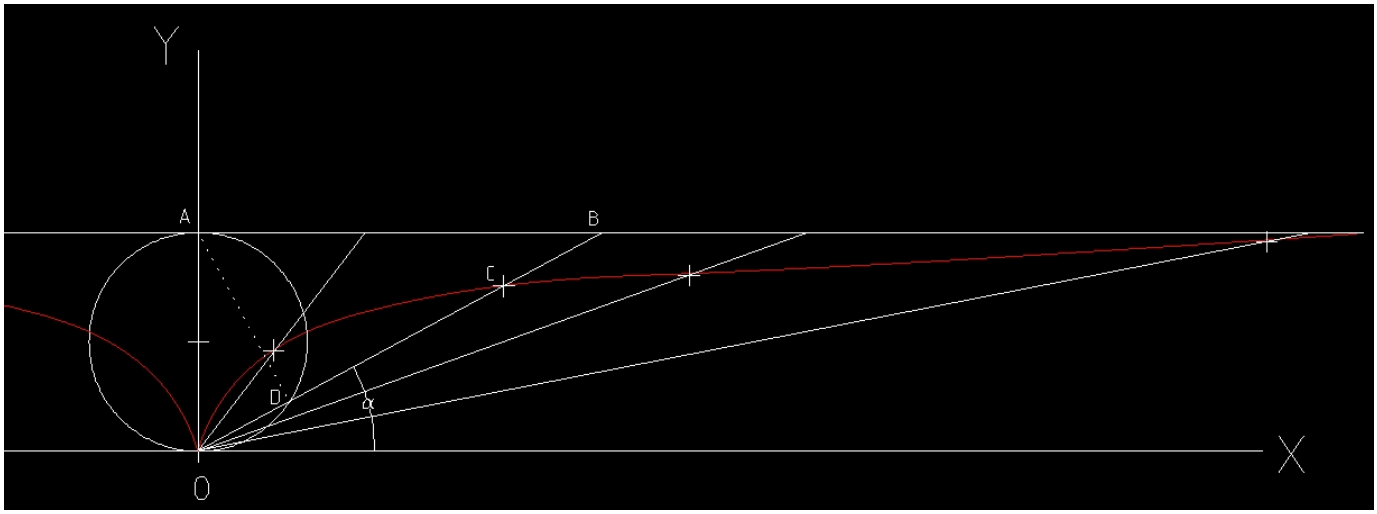


Fig. 4

Por definición de la cisoide y, para su construcción, hay que tener en cuenta que con cualquier punto de la curva, como el C (x, y) de la Fig. 4, por ejemplo, ha de ocurrir que OD = CB o, lo que es lo mismo, OC = DB. Esta condición es la base segura para dibujar la cisoide con precisión. Una vez obtenidos los puntos, hay que pasar sobre ellos, cuidadosamente, la aplicación spline (línea de segmentación polinómica).

Si yo he empleado antes el sistema de las dos parábolas ha sido para dejar constancia de una alternativa singular para construir la cisoide de Diocles.

Obtengamos ahora la ecuación en coordenadas cartesianas de la cisoide (Fig. 4).

OC = OB – CB = OB – OD

En el triángulo AOB, es sen α = 2a / OB

OB = 2a / sen α

En el triángulo AOD, es OD / 2a = sen α puesto que el ángulo OAD = α.

OD = 2a sen α

OC = OB – OD = 2a ((1 / sen α) - sen α) = 2a (1 – sen^2 α) / sen α = 2a cos^2 α / sen α

Por otra parte tenemos que

cos α = x / OC

$OC^2 = x^2 + y^2$

OC = 2a cos^2 α / sen α = (2a x^2 / OC^2) / (y / OC) = 2a (x^2 OC / OC^2 y)

$OC^2 y = 2a x^2$

$$(x^2 + y^2)\, y = 2a\, x^2$$

que es la ecuación de la cisoide para la configuración que tiene en la Fig. 3.

EL CUBO DOBLE

Una cuestión que ha sido siempre del mayor interés es la de conseguir un cubo cuyo volumen sea doble que el de otro dado. Ello quiere decir que si el cubo pequeño tiene arista L, la del grande ha de medir $\sqrt[3]{2}$ L.

En mis
https://caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/Extraordinario 2000.pdf
https://www.caprichos-ingenieros.com/ewExternalFiles/Mathematics%20and%20Origami.pdf
Punto 18.8 yo trato este asunto según tres soluciones diferentes.

Diocles apunta una solución más con su cisoide y, para mostrarla, me apoyaré en la Fig. 5 que es como la 3 pero, bien hecha. Para conseguir dicha Fig. 5 he empleado un falso compás como el que sobresale en la figura. En el departamento de metrología de fábrica se solía utilizar la llamada falsa escuadra que es la que me ha sugerido el nombre para mi compás; es éste a la vez, falso y verdadero: es falso porque no es como los convencionales, pero es verdadero porque cumple a la perfección su papel de transportar segmentos en CAD.

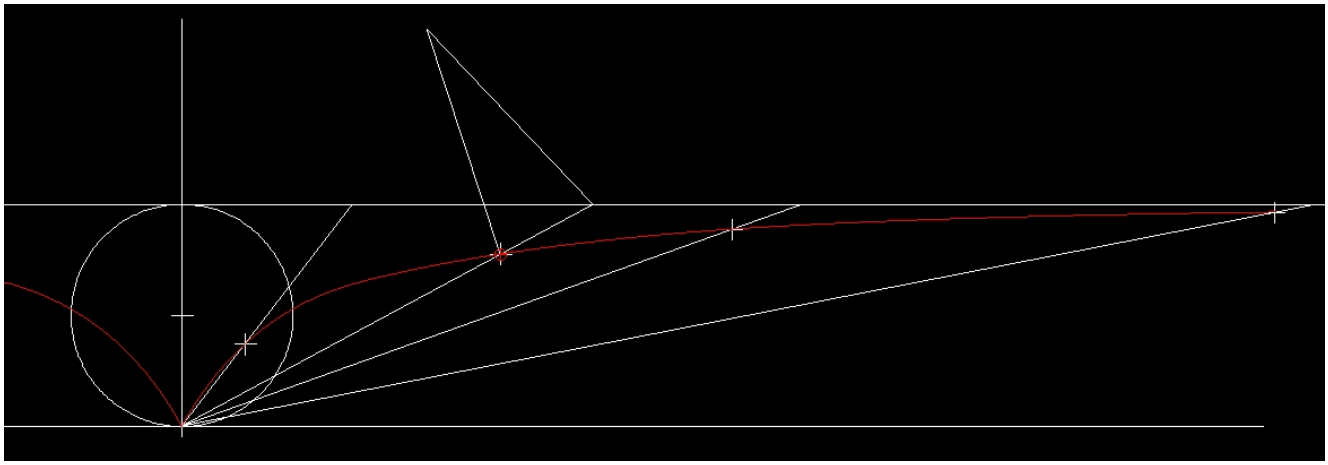


Fig. 5

Con la Fig. 6 volvemos al cubo doble. Según se ve en ella, se toma OE = 2 OA, es decir, OE = 4a. Se traza luego EA que corta a la cisoide en C. Se dibuja a continuación OB pasando por C.

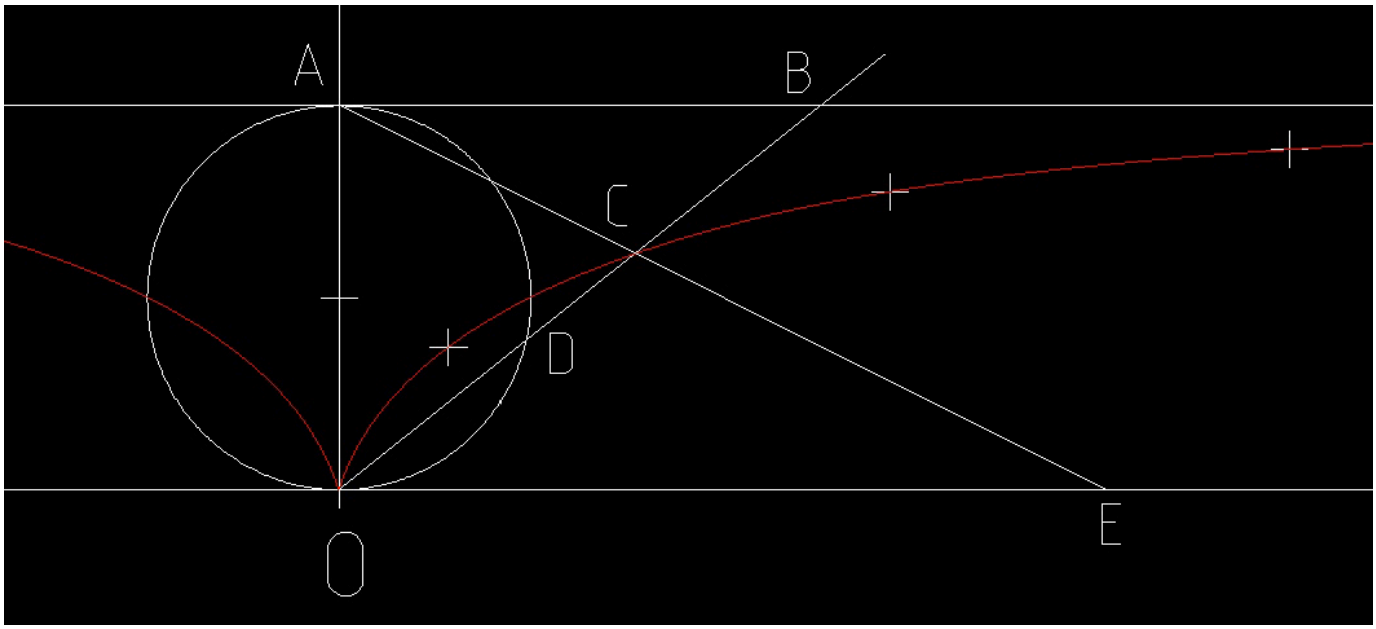


Fig. 6

Vamos a demostrar que si OA es el lado del cubo pequeño, AB lo es del grande, del de volumen doble. El proceso es el siguiente:

Dar por supuesto que la pretensión enunciada es cierta.
Hacer $t = \sqrt[3]{2}$
Mostrar las coordenadas de los puntos O, A, B, E.
Obtener las ecuaciones de las rectas OB y AE.

Hallar las coordenadas de C, el punto de intersección de ambas.
Llevar las coordenadas de C a la ecuación de la cisoide; si ésta queda satisfecha, quedará demostrada la pretensión planteada.

O (0, 0)
E (4a, 0)
A (0, 2a)
B (2at, 2a)

<u>Recta OB</u>

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2at & 2a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- (2ax – 2aty) = 0
ty = x
y = x / t

<u>Recta AE</u>

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2a & 1 \\ 4a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- $8a^2$ – (- 4ay) + 2ax = 0

$$y = \frac{4a - x}{2}$$

Coordenadas de C (intersección de OB y AE):

$$\frac{x}{t} = \frac{4a-x}{2}$$

$$x = \frac{4at}{t+2}$$

$$y = \frac{4at}{t(t+2)} = \frac{4a}{t+2}$$

Ecuación de la cisoide:

$$(x^2 + y^2)\, y = 2a\, x^2$$

$$x^2 = \frac{16a^2t^2}{(t+2)^2}$$

$$y^2 = \frac{16a^2}{(t+2)^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{16a^2(t^2+1)}{(t+2)^2}$$

$$(x^2 + y^2)y = \frac{16a^2(t^2+1)}{(t+2)^2} \times \frac{4a}{t+2} = \frac{64a^3(t^2+1)}{(t+2)^3}$$

$$2ax^2 = \frac{32a^3t^2}{(t+2)^2}$$

$$\frac{64a^3(t^2+1)}{(t+2)^3} = \frac{32a^3t^2}{(t+2)^2}$$

$$\frac{2(t^2+1)}{t+2} = t^2$$

$$2t^2 + 2 = t^3 + 2t^2$$

$$2 = t^3$$

$$t = \sqrt[3]{2}$$

L.Q.Q.D.

El resultado es, pues, fruto de una demostración, como en el caso de la ecuación de la cisoide. Otra cosa es el planteamiento inicial de las parábolas; aquello era una simple mostración.

RISUM TENEATIS
(Aguanta la risa como puedas, amigo)

Ignoro el fondo de la cuestión pero sospecho que lo que luego recojo en negritas es parte de una traducción (muy mala) que está disponible en una URL que difunde cosas de Vikipedia después de traducirlas.

Como se sabe, Newton escribió en latín sus *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* y Horacio le advirtió de lo de la risa por lo que podría pasarle.

Newton se metía en todo lo matemático, y lo de la cisoide no fue una excepción. Inventó un complicado sistema de varillas articuladas que servían para dibujar la curva.

El tal sistema está descrito descabelladamente en la URL que mencionaba antes; fui incapaz de componerlo. Para que se entienda lo que quiero decir, lean:

Por construcción, PT = un , así que la distancia de P a J es un ψ pecado. En otras palabras, un - x = un ψ pecado.

Comentar esto es tan penoso como explicar un chiste, pero no hay otro remedio, porque también tiene su gracia.

En inglés, el seno trigonométrico es *sine*, y su abreviatura en las fórmulas, *sin*. Ocurre igual en español con *seno* y *sen*.

Lo que pasa con nuestro ínclito traductor es que nos quedamos sin saber qué es ese **un** pero, a cambio, nos recuerda que el sin inglés (el sen trigonométrico español), para Newton y para los demás ingleses, es pecado, aparte de que también sea el seno trigonométrico. Y de ello deja constancia: el **ψ pecado** es lo mismo que el sen ψ.

Añadiré un punto de gracieta andaluza de romería. A la Virgen del Rocío la llaman sus devotos fieles la "sin pecado" que, puesto en espanglis quiere decir "pecado pecado" (!!).

……..